はじめよう数学

上野健爾｜浪川幸彦｜高橋陽一郎｜編集

3

複素数の世界

Ueno Kenji

上野健爾

［著］

日本評論社

はじめよう数学

この本を手に取られたみなさん！

この本は，同じシリーズの他の本とともに，みなさんを新しい数学の世界に御案内します．

出発地は，みなさんが大学や高等学校で学んでいる数学そのものです．いえ，ここで本を閉じてはいけません．みなさんの学んでいる数学が，いかに豊かでさまざまな数学の世界につながっているかを具体的に知っていただこうというのがこのシリーズの目的です．

旅行の準備として用意していただくものは鉛筆と紙．必ず自分で計算したり，図を書いたりして，自分の頭で考えながらお読みください．結構ハードな道もありますから，寝転がって読んでいたりすると，道に迷ってしまうかも知れませんよ．

私達がみなさんをお連れしようとしている場所は様々です．

数学は数千年以上昔，エジプト，メソポタミアで生まれ，ギリシャで一つの「学問」になりました．ピタゴラスやユークリッドの世界です．ある本はそうした数学の古い伝統がいかに現代にまで連なっているかを見せてくれるでしょう．

近代数学は，18 世紀のオイラーに端を発し，19 世紀のガウス，アーベル，リーマンなどきら星のように輝く巨人達によって花開きました．そこには数多くの美しい理論が生まれ育っています．みなさんが高等学校・大学初年時に学ぶ数学のほとんどはこの時代に由来します．ある本はみなさんの学んでいる数学が，いかに豊かで深い理論に関わっているかを教えてくれるでしょう．

では一体「現代数学」とはどんなものなのでしょう？ 20 世紀になって，前世紀からの豊かな理論は一層の発展を遂げ，以前とは大

きく異なる姿を見せるようになりました．様々の道具としての新しい概念や理論が提唱され，「抽象化」「一般化」され，それによって未解決の問題が次々に解かれていったのです．ある本はこうした数学の新たな展開について語ってくれるでしょう．

もう一つ今世紀の数学の大事なところは，数学の言葉が提唱され，数学が体系化されたことです．ヒルベルトからブルバキへの流れです．今はその言葉が普通に使われているため，かえって気がつかないのかも知れません．でもある本は「数学は一つだ」と主張して，このような言葉の大切さを思い起こさせてくれるでしょう．

また数学は物理学など他の学問と深い関わりを持っています．「自然は幾何学の言葉で書かれている」というのはガリレイの有名な言葉です．微分積分学はニュートン力学の誕生とともに確立されました．身近な様々の事柄の中に，実は深い数学が潜んでいるのです．ある本はこのような宝探しのガイドをしてくれるでしょう．

一方で数学は「あそび」です．ゲームや折り紙など，さまざまの頭の体操は数学を基にしています．それを追求していくと，その遊びの本質が実は深い理論につながっていることが分かるのです．ある本はこうして遊びながら数学を学ぶ方法を伝授してくれるでしょう．

こんなにいろいろの数学の世界がみなさんを待っています．

さあ数学を始めましょう！　みなさんはどの道を選びますか？

編集委員一同

はじめよう数学

3

複素数の世界

まえがき

本書は1993年4月から7月まで京都大学理学部において第2回「高校生のための現代数学入門講座」の一環として行った8回の講義「複素数の世界」をもとに，雑誌『数学セミナー』に1994年4月から1年間連載したものに基づいている．連載では，どうしても紙数の制限が入り，駆け足になってしまいがちである．本文に加筆しようと試みたが，逆に連載には連載の勢いがあり，加筆すると木に竹を接いだようになってしまうことに気づき，連載でできなかった話題についてのみ，最後の2節として追加することにとどめた．その代わり，各節末に質問コーナーを設けて本文の理解の手助けとした．練習問題は本文理解の一助になるので巻末の解答を見る前に自ら考えていただきたい．

本書の内容は，複素函数論や複素解析とよばれる分野の紹介である．通常の教科書とは違い，理論を体系的に述べるのではなく，高校数学でも登場する事実が複素函数論としてどのように深められていくかを中心に述べた．複素函数論はコーシーの積分定理をその核として，美しい体系が築かれており，数学理論の美しさを味わうには格好の題材となっている．また，そこから拡がっていく数学も興味深いものが多い．本書をひもとかれて，複素数の持つ世界の広がりを感じ取ってもらえることを希望する．

本書のもとになった数学セミナー連載中，柴田勝征氏には記述の誤りを指摘して頂いた．また，広島市の友弘節夫氏はリーマン球面に関する質問(第2章2節の質問コーナー)をお寄せいただき，本書に質問コーナーを設けるヒントともなった．両氏に深く感謝する．

さらに，日本評論社の横山伸氏には数学セミナー連載中のみならず，本書の出版に関してもお世話になった．氏に心から感謝したい．

1999年10月

上野健爾

●目次

第 1 章

複素数

序にかえて

万物は数(整数または有理数)であると主張したピタゴラス派の人達が，他ならぬピタゴラスの定理から出てくる数 $\sqrt{2}$ が有理数でないことを発見したときの衝撃は，プラトンの対話篇『テアイテトス』から読みとることができます．古代ギリシア人が幾何学的にしか数を扱わなかったことにもその衝撃の大きさを見ることができます．

複素数の発見という，さらに大きな衝撃に関しては，残念ながらプラトンに匹敵する書は現われませんでした．「虚数」(imaginary number)という言葉が示すように，複素数は裏の世界に閉じ込められ，数学者の間でその正当な存在意義が認められるまでに実に長い年月を要しました．残された文献ではカルダノによる2次方程式および3次方程式の解法の中に初めて複素数が登場しているようですが(1545年)，それ以前にも2次方程式の解法から複素数を考えた人達はいたものと思われます．複素数を有効に使ったオイラー(1707-1783)でさえ，複素数を「虚」のあるいは「想像上」の数としてしか説明することができなかったようです．複素数の持つ大切な意味はコーシー(1789-1857)，ガウス(1777-1855)を経て，リーマン(1826-1866)によって初めて明らかになりました．

このように，複素数をめぐる数学史そのものが，大変興味深い書物と言うべきですが，そうした歴史は他書にまかせることにして，第1章では複素数の登場する必要性を少し述べておくことにします．本書の目標は，オイラーの見いだした公式

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

を示すことにおきたいと考えています．複素数の微積分ともいうべき「函数論」の世界にみなさんを招待して，複素数の世界の美しさを少しでも味わってもらうことができたらと考えています．

§1　複素数の誕生

複素数は 2 次方程式と密接に関係しています．実数を係数とする 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a\neq 0 \tag{1.1}$$

を考えてみましょう．この方程式は

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

と変形できますので，この方程式の解は

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1.2}$$

と与えられます．しかしながら，2 次方程式の判別式 $D=b^2-4ac$ が負のときは平方根 $\sqrt{b^2-4ac}$ に問題があることは，はるか昔から知られていました．実数 $a\neq 0$ に対しては，つねに

$$a^2>0$$

が成立しますから，2 乗して $D=b^2-4ac<0$ となる実数は存在しないからです．したがって，この場合 2 次方程式(1.1)は解を持たないと考える方が自然のように思われます．2 次方程式を考える限り，「虚数」を導入する必然性はあるようには思われませんが，3 次方程式の解法を考えると複素数がどうしても必要になります．3 次方程式

$$x^3+px+q=0 \tag{1.3}$$

を考えましょう．いささか天下りですが

$$\begin{cases} t-u=-q \\ tu=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases} \tag{1.4}$$

を満足する数 t, u を考え

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u} \tag{1.5}$$

とおきます．ここで $\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{u}$ は3乗してそれぞれ t, u になる“数”とします．(1.5)の両辺を3乗しますと，(1.4)を使って

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u})^3 \\ &= t - 3(\sqrt[3]{t})^2 \cdot \sqrt[3]{u} + 3\sqrt[3]{t} \cdot (\sqrt[3]{u})^2 - u \\ &= -q - 3\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{u}(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}) \\ &= -q - px \end{aligned} \tag{1.6}$$

が成り立つことが分かります．ただし，(1.4)より少し強い

$$\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{u} = \frac{p}{3} \tag{1.7}$$

を使いました．((1.7)は(1.4)より導かれるように思われますが，後に述べますように，$\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{u}$ として複素数を考えると，(1.4)の2番目の式が成立しても(1.7)が成立するとは限らないことが分かります.)

(1.6)は $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$ が3次方程式(1.3)の解であることを示しています．(1.4)より t, u を求めるには，(1.4)の最初の式から

$$u = t + q$$

が成り立つことに注意して，これを2番目の式に代入して，2次方程式

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

を解くことによって得られます．この2次方程式の解

$$t = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

をとると

$$u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

となり，3次方程式(1.3)の解として

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{1.8}$$

が得られます．みなさんの中にはけげんな顔をしている人がいますね．

$$t=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u=\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ととれば,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (1.9)$$

も解になるはずだが？ 3次方程式は3個の解を持つはずだが，2つしか解が出てこない？ そうです，こうした疑問に答えるために，複素数が必要なのです．もう少し待ってください．

この解の公式(1.8)は，カルダノが1545年に発表したものですが奇妙な性質を持っています．3次方程式

$$x^3-15x-4=0 \qquad (1.10)$$

を考えてみましょう．

$$x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x+1)$$

と因数分解できますので，この3次方程式は

$$4,\quad -2+\sqrt{3},\quad -2-\sqrt{3}$$

と実数解を3個持ちます．一方，カルダノの公式(1.8)を使いますと，解として

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} \qquad (1.11)$$

が登場します．3乗根をとる前の数 $2+\sqrt{-121}$, $-2+\sqrt{-121}$ はともに複素数です．しかしながら，数(1.11)は3次方程式(1.10)の解ですので実数のはずです．このように，3次方程式のカルダノによる解の公式では，実数解を求めるのにも複素数を用いる必要があります．このようにして，複素数はその存在を自ら主張したのですが，カルダノを初めとする同時代の数学者は，この事実を深く追求することはできませんでした．2乗して負になる“数”は奇妙に思われたからです．

以上の話で複素数の必要性が，おぼろげには分かっていただけたと思いますので，複素数をこれから導入して，上の議論を反省してみることにします．まずオイラーにならって，

$$x^2+1=0$$

の解の一つを i とおきます．すなわち

$$i^2=-1$$

が成り立つ“数”を考えます．すると $x^2+1=0$ のもう一つの解は $-i$ になります．i は通常，**虚数単位**とよばれます．実数 a, b に対して

$$a+bi$$

を**複素数**とよびます．また実数 a と複素数 $a+0i$ とは同じものと考えます．したがって，特に $0=0+0i$ が成り立ちます．二つの複素数 $a+bi, a'+b'i$ の足し算，引き算，かけ算は

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$$

と定義します．複素数

$$\alpha=a+bi$$

に対して，その**共役複素数** $\bar{\alpha}$ を

$$\bar{\alpha}=a-bi$$

と定義します．すると

$$\alpha\cdot\bar{\alpha}=a^2+b^2$$

となります．したがって，$\alpha\neq 0$ のとき

$$\alpha\cdot\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}=1$$

が成り立ちます．これより，複素数では $a+bi\neq 0$ のとき割り算ができ，

$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(a'a+b'b)+(b'a-a'b)i}{a^2+b^2}$$

が成り立つことが分かります．このように，複素数では加減乗除を自由に行えることが分かり，“数”としての基本的な性質を持っていることが分かります．

複素数に関する以上の基本的な性質を使って，上の 2 次方程式，3 次方程式の議論をふり返ってみましょう．

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は(1.2)より

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1.12}$$

と書けますが，$b^2-4ac<0$ のときは，この公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$

と考えることができます．ここで $\sqrt{4ac-b^2}$ は 2 乗として $4ac-b^2>0$ となる正の実数とします．

ところで，2 次方程式の係数 a, b, c が複素数のときは解はどうなるでしょうか．(1.12)は a, b, c が複素数でも成り立ちます．今度は判別式 $D=b^2-4ac$ が複素数になってしまいますが，$\sqrt{b^2-4ac}$ は 2 乗して b^2-4ac になる複素数と考えれば(1.12)が解の公式を与えることになります．そこで，複素数 α に対して，その平方根 $\sqrt{\alpha}$ を定めることができれば(1.12)が複素数を係数とする 2 次方程式の解の公式を与えることが分かります．

$\sqrt{\alpha}$ を求めるには，

$$\alpha=e+fi, \qquad \sqrt{\alpha}=x+yi \qquad (e, f, x, y \text{ は実数})$$

とおくと，

$$(x+yi)^2=e+fi$$

が成り立つことを使います．この等式より

$$x^2-y^2=e, \qquad 2xy=f \tag{1.13}$$

が成り立ちます．α が実数のときは $\sqrt{\alpha}$ の意味は分かっていますので，以下 α は実数ではない，したがって $f\neq 0$ と仮定します．このとき(1.13)の 2 番目の式より $x\neq 0$ であることが分かります．そこで(1.13)を解くために，2 番目の式より得られる

$$y=\frac{f}{2x}$$

を最初の式に代入しますと

$$x^2-\frac{f^2}{4x^2}=e$$

となります．$X=x^2$ とおくと，この式を

$$X^2-eX-\frac{f^2}{4}=0$$

と書き換えることができます．e,f は実数ですのでこの 2 次方程式の解は

$$X=\frac{e\pm\sqrt{e^2+f^2}}{2} \tag{1.14}$$

となります．ところで x は実数でしたので

$$X=x^2\geqq 0$$

でなければなりません．したがって(1.14)より

$$X=\frac{e+\sqrt{e^2+f^2}}{2}$$

でなければならないことが分かり，

$$x=\pm\sqrt{\frac{e+\sqrt{e^2+f^2}}{2}}$$

であることが分かります．x はたしかに実数であることに注意しましょう．
また $y=\dfrac{f}{2x}$ でしたので

$$y=\pm\frac{f}{2\sqrt{\dfrac{e+\sqrt{e^2+f^2}}{2}}}$$

となり，

$$\sqrt{\alpha}=\pm\left(x_0+\frac{f}{2x_0}i\right),\qquad x_0=\sqrt{\frac{e+\sqrt{e^2+f^2}}{2}} \tag{1.15}$$

と書けることがわかりました．$\sqrt{\alpha}$ は 2 乗して α である複素数ですから(1.15)に複号 ± が出てきたのは自然です．この複号のうち，どちらが $\sqrt{\alpha}$ であるかとの疑問が出てくると思います．そのためには，α が正の実数のとき通常の $\sqrt{\alpha}$ と一致するように符号を決めてみましょう．(1.15)で $f=0$，$e>0$ としますと

$$\sqrt{\alpha}=\pm\sqrt{e}$$

となります．そこで

$$\sqrt{\alpha}=x_0+\frac{f}{2x_0}i$$

とおくとよいと思われます．じつは $\sqrt{\alpha}$ をこのように定めることは必ずしも

賢明な処置でないことは第５章§３の演習問題で分かります．いずれにせよ，複素数 α に対して $\sqrt{\alpha}$ が複素数として存在することが分かりましたので，複素数 $a \neq 0, b, c,$ に対して，２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と表示できることが分かりました．このように，２次方程式では係数を複素数まで拡げても，その解は複素数の範囲にとどまり，新しい“数”は必要としないことが分かります．

ところで $\sqrt{\alpha}$ を表わす式(1.15)は複雑な形をしている上に，α が負の数のときは意味をなしません．$\sqrt{\alpha}$ に限らず，α の n 乗根 $\sqrt[n]{\alpha}$，すなわち n 乗して α となる複素数，の表示法は次の節で詳しくお話ししたいと思います．

ここでは，任意の複素数 α に対して

$$\beta^3=\alpha$$

となる複素数 β，すなわち α の３乗根 β が少なくとも一つ存在することを認めて話を進めることにします．$\alpha=1$ のときは，方程式

$$x^3=1$$

は，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

より，簡単に解くことができ，解は

$$1,\qquad \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\qquad \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

であることが分かります．

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

とおくと，

$$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

であることは，計算で直接確かめることができます．さらに

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であることを使えば*)

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

と書けることに注意しておきましょう．このことをヒントとして，方程式

$$x^n = 1$$

の解がどのように表示できるか，次節までの宿題として考えてみてください．

さて，

$$\beta^3 = \alpha$$

が成り立ちますと

$$(\beta\omega)^3 = \alpha, \qquad (\beta\omega^2)^3 = \alpha$$

も成り立ちます．したがって方程式

$$x^3 = \alpha$$

の解は

$$\beta,\ \beta\omega,\ \beta\omega^2$$

であることが分かります．

以上の準備のもとに，3 次方程式

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1.3}$$

を再度考えてみましょう．

$$\begin{cases} t - u = -q \\ tu = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

とおいたとき，

---

*) ここでは角度の単位として 360° を 2π ラジアンとする弧度法を使っています．弧度法については §2 で簡単に説明します．

$$\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{u}=\frac{p}{3}$$

が成立するように，t, u の 3 乗根 $\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{u}$ をとる必要がありました．このような 3 乗根が存在することをまず示しておきましょう．

$$\beta^3=t, \qquad \gamma^3=u$$

を満足する複素数 β, γ を選んでおきます．すると

$$(\beta\gamma)^3=tu=\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

が成り立ちますので，$\beta\gamma$ は方程式

$$x^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

の解であることが分かります．一方，この方程式の 3 個の解は

$$\frac{p}{3}\omega^j, \qquad j=0,1,2$$

と書けますので($\omega^0=1$ と約束します)，

$$\beta\gamma=\frac{p}{3}\omega^j$$

が成り立つように j が定まります．このとき $\sqrt[3]{t}=\beta$，$\sqrt[3]{u}=\gamma\omega^{3-j}$ とおけば，

$$\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{u}=\beta\gamma\,\omega^{3-j}=\frac{p}{3}\omega^3=\frac{p}{3}$$

が成り立つことが分かります．さらに，このとき

$$\sqrt[3]{t}\,\omega\cdot\sqrt[3]{u}\,\omega^2=\frac{p}{3}$$

$$\sqrt[3]{t}\,\omega^2\cdot\sqrt[3]{u}\,\omega=\frac{p}{3}$$

も成り立ちます．したがって，$\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{u}$ のかわりに $\sqrt[3]{t}\,\omega, \sqrt[3]{u}\,\omega^2$，または $\sqrt[3]{t}\,\omega^2, \sqrt[3]{u}\,\omega$ を使うこともできるので 3 次方程式(1.3)の解は

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\\ \omega\cdot\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}-\omega^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\\ \omega^2\cdot\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}-\omega\cdot\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\end{array}\right. \tag{1.16}$$

の 3 個であることが分かります．一方，(1.9)を使えば

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\\ \omega\cdot\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}-\omega^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\\ \omega^2\cdot\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}-\omega\cdot\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}},\end{array}\right. \tag{1.17}$$

も 3 次方程式(1.3)の解のはずです．6 個解が見つかったのでしょうか．そうではありません．(1.16)と(1.17)とは順序が違うだけで，方程式(1.3)の 3 つの解を表わしていることが分かります．(1.16)の 1 番目の解が(1.17)のどの解と一致するかを調べるためには，どのような 3 乗根を基礎にしたかを調べることが必要で大変複雑になります．しかし，3 次方程式は重複度をこめて 3 個しか解を持たないことから，(1.16)と(1.17)とは集合としては一致していることが分かるわけです．3 次方程式(1.3)の解の公式(1.16)または(1.17)は p, q が複素数であっても成り立ちます．一般に，代数方程式を考える限り，複素数まで数を拡げて考えれば十分であることが，次の定理の主張です．

定理 1.1　複素数係数の n 次方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

は重複度をこめて n 個の解を複素数内に持つ．

この定理は，昔の名残で代数学の基本定理とよばれています．この定理の証明については，第4章§4で述べます．この定理を使えば複素数係数の n 次式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

は

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

と1次式に因数分解できることが分かります．$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は方程式

$$f(x) = 0$$

の解ですが，数学の正式の用語としては式 $f(x)$ の根(こん)(root)とよびます，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が分かれば式 $f(x)$ は式

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

の a_0 倍となり，$f(x)$ は本質的に分かってしまいます．$f(x)$ を成り立たせるもと(root)であるので根とよぶわけです．$f(x) = 0$ の解のことも，通常は根とよびます．「根」という用語が高校数学から追放されてしまったのは困ったことだと思っています．これからは，解というかわりに根ということが多くなるかもしれませんが，事情はお分かりいただけたと思います．次節からは，複素数の世界へ，本格的に入って行きたいと思います．

演習問題

1. 3次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

は，変数変換

$$X = x + \frac{a}{3}$$

によって，

$$X^3 + pX + q = 0$$

の形に変形できることを示せ．(これを使って，3次方程式の根の公式(1.16)から，一般の3次方程式の根の公式を導くことができる．)

2. 3次方程式

$$x^3+x-2=0$$

は1を根として持つ．カルダノの公式(1.16)を使って

$$1=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{1}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+\frac{1}{27}}}$$

を示せ．ただし，3乗根は正の数をとるものとする．

質問コーナー

質問　3次方程式の解法で複素数が必要になることは一応分かりました．複素数はやはり人為的な数であって本当の数とは思えないのですが．

質問に答えて

数の概念は時代や文明とともに変わってきました．数学の基礎を作ったといわれる古代ギリシアでは数とは整数のことでした．分数 $\frac{b}{a}$ は比 $b:a$ のことであり，数の仲間であるという明確な意識はありませんでした．有理数(rational number)の ratio は比のことであり，rational number は比を持つ数を意味します．$\sqrt{2}$ が有理数でないことを発見したのは古代ギリシアですが，無理数(irrational number)は比を持たない，すなわち整数の比で表すことのできない数というのが本来の意味です．古代の中国では負の数を認め足し算や引き算を自由に行なっていましたが，ヨーロッパでは古代ギリシアだけでなく中世でも負の数は数として認められませんでした．ライプニッツでさえ負の数は便宜的なものであると考えた時期があったようです．ですから私達が実数は当り前の存在であり，数直線ですべての実数は表わされることを当然のことと思うのは私達が受けた教育の成果なのです．

古代の人達の多くは無理数や負の数は人為的な数と思ったのです．それと同様に，現代でも複素数は多くの人達にとって人為的な数としか思えないでしょう．本書の目的は複素数まで数を拡げて考えると豊かな数学の世界が拡がっていることを示すことにあります．本書を最後まで読めば，複素数がけっして人為的な数ではないことを納得して頂けると思います．

なお複素数は電気工学や量子力学でもなくてはならない数です．私達が電

気を使って豊かな生活ができるのも，じつは私達の知らない所で複素数が大躍躍しているからです．今日の文明を享受し，ワープロまで使っている人が「私は2次方程式の解の公式は必要としなかった」というのは，本人の無知をさらけ出しているだけでなく，数多くの先人の努力に対する冒瀆に他なりません．

§2 複素平面

複素数 $\alpha = a+bi$ は実数 a, b の組で決まりますので，平面上に座標 (a, b) で与えられる点として考えることは自然のように思われます．この節では，こうした幾何学的な考え方が，複素数の持つ性質の一面をよくとらえることができることをお話したいと思います．その前に，前節で話しが不十分であったところから始めましょう．

複素数 $\alpha = a+bi$ $(a, b$ は実数$)$ に対して，a を複素数 α の**実部**といい $\mathrm{Re}\,\alpha$ で，b を複素数の**虚部**といい $\mathrm{Im}\,\alpha$ で表わします．

$$a = \mathrm{Re}\,\alpha$$

$$b = \mathrm{Im}\,\alpha$$

(正確には α の虚部は bi ですので，b を α の虚部というのは変な気もしますが，これは長い間に確立した約束ですので，b を α の虚部ということにします．)　複素数の計算法から，複素数 α, β に対して

$$\mathrm{Re}(\alpha+\beta) = \mathrm{Re}\,\alpha+\mathrm{Re}\,\beta$$

$$\mathrm{Im}(\alpha+\beta) = \mathrm{Im}\,\alpha+\mathrm{Im}\,\beta$$

が成り立つことは容易に分かります．

次に共役複素数について少し述べておきましょう．複素数 $\alpha = a+bi$ に対して

$$\bar{\alpha} = a-bi$$

を α の**共役複素数**とよびます．α の共役複素数 $\bar{\alpha}$ は

$$\mathrm{Re}\,\bar{\alpha} = \mathrm{Re}\,\alpha$$

$$\mathrm{Im}\,\bar{\alpha} = -\mathrm{Im}\,\alpha$$

を満足する複素数に他なりません．また定義から，

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha,$$

すなわち，α の共役複素数の共役複素数は α であることもすぐ分かります．さらに

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta} \qquad \text{(複号同順)}$$

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

も簡単な計算で示すことができますので，次の等式とともに，みなさんの演習問題とします．

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$$

$$\mathrm{Im}\,\alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

ところで，共役複素数を使うと，

α が実数 $\Longleftrightarrow \alpha = \bar{\alpha}$

α が純虚数（すなわち $\alpha = bi$ （b は実数））$\Longleftrightarrow \alpha = -\bar{\alpha}$

という言い換えができます．このことは，後に何度も使うことになると思います．準備の最後として，複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，その**絶対値** $|\alpha|$ を

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

と定義します．

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

ですので，

$$|\alpha|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha}$$

あるいは

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}$$

と書くこともできます．また 2 つの複素数 α, β に対して

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

が成り立つことも，簡単な計算で示すことができます．

以上で，前節の補習は終ります．約束通り，複素数の幾何学的取扱いを述べることにしましょう．複素数 $\alpha = a+bi$ に対して，平面上の点

$$\mathrm{P} = (a, b) = (\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Im}\,\alpha)$$

を対応させます．平面の座標軸は通常の x 軸，y 軸と違って，図 2.1 のように Re, Im と書いて**実軸**，**虚軸**とよぶことにします．また，この平面を通常**複素平面**とよびます．

複素数 $\beta = c+di$ に対しては点 $\mathrm{Q} = (c, d)$ が対応します．このとき，複素数 $\alpha+\beta$ には点 $\mathrm{R} = (a+b, c+d)$ が対応します．これはベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

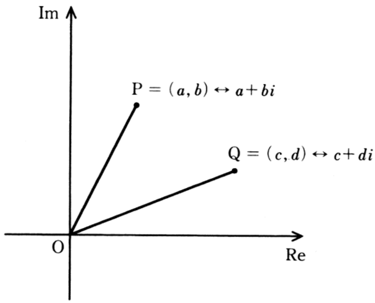


図 2.1

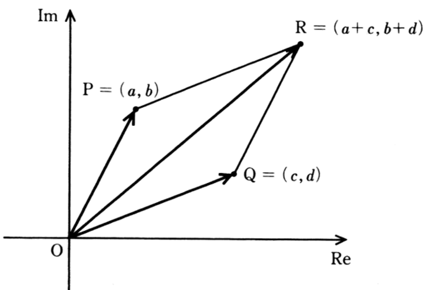


図 2.2

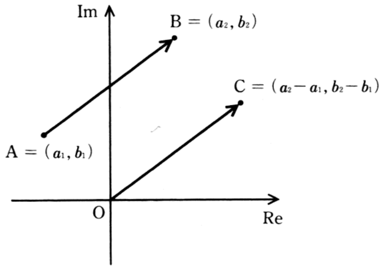


図 2.3

を意味します(図 2.2)．そこで，複素数をベクトルとして考えることも意味があることのように思われます．複素平面の点 A = (a_1, b_1) を始点とし，点 B = (a_2, b_2) を終点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，始点を原点に平行移動してできるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の終点 C = (a_2-a_1, b_2-b_1) に対応する複素数 $(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i$ を表示すると約束します(図 2.3)．このように約束しますと，複素数の加法，減法はベクトルの加法，減法と同じに考えることができます．たとえば $\gamma=\alpha-\beta$ は図 2.4 のように α, β がそれぞれベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に対応すれば，γ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ に対応する複素数になります．また，複素数の関係式

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$$

はベクトル表示すれば図 2.5 のように，閉じた n 辺形ができることを意味することが分かります．

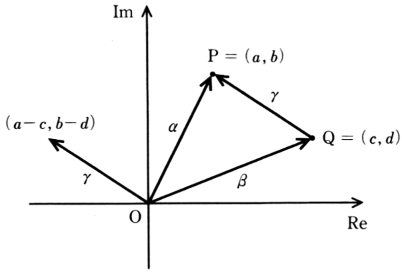


図 2.4

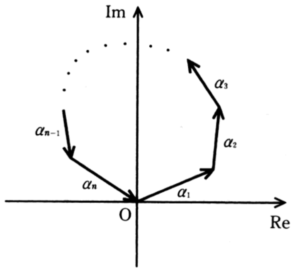


図 2.5

次に複素数の乗法，除法に関して，その幾何学的意味を調べたいと思いますが，そのためには複素数を極座標を使って表示することが必要になります．そのために少し準備をしましょう．

複素数の複素平面上への図示をもう一度考えましょう．複素数 $\alpha = a+bi$ に対応する点 P，またはベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を考えると，その長さは $\sqrt{a^2+b^2}$，すなわち α の絶対値 $|\alpha|$ に等しいことが分かります．このことから，正の数 r に対して

$$|z| = r$$

を満足する複素数 z の全体は複素平面上では原点を中心とする半径 r の円

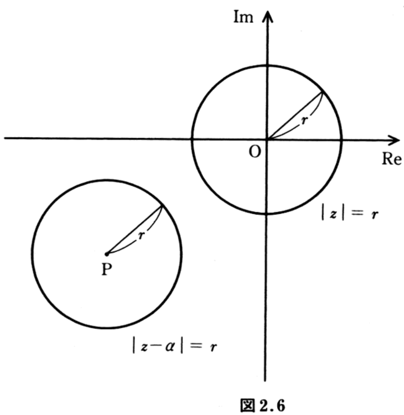


図 2.6

周であり，

$$|z-\alpha| = r$$

は複素平面上では α に対応する点 P を中心とする半径 r の円周を表すことが分かります(図 2.6)．ついでに，以後よく使う次の補題を証明しておきましょう．

複題 2.1　2 つの複素数 α, β に対して不等式

$$|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$$

$$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta|$$

がつねに成り立つ．

証明　図 2.2 より

$$\mathrm{OR} \leqq \mathrm{OP}+\mathrm{PR}$$

であるので，$|\alpha| = \mathrm{OP}$, $|\beta| = |\mathrm{PR}|$, $|\alpha+\beta| = \mathrm{OR}$ より最初の不等式が成り立つ．(等号が成り立つのは O, P, Q, R が一直線上にあるとき，すなわち

$$\alpha = \lambda\beta$$

を満たす実数 λ が存在するとき($\beta \neq 0$ のとき)であることも図 2.2 より分かる.)　二番目の不等式は，最初の不等式を使って

$$|\alpha| = |(\alpha-\beta)+\beta| \leqq |\alpha-\beta|+|\beta|$$

が成り立つことより示される．

さて，図 2.7 へ戻りましょう．複素数 $\alpha = a+bi$ に対応する点 P に対して，実軸の正の部分から線分 OP へ**反時計まわりに**はかった角度を θ としま

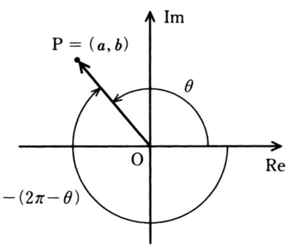


図 2.7

す．θ は以下弧度法を使って考えることにします．弧度法は 360° を 2π ラジアンとする角度をはかる単位で，正確には単位円周上を反時計まわりに P_1 から P_2 へ長さ θ だけ進んだとき $\angle P_1OP_2$ を θ ラジアンと定義(図 2.8)します．弧度法を使う理由は，後に指数函数と三角函数のテーラー展開のところで明らかになります．

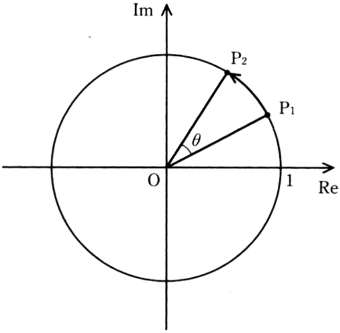


図 2.8

以後反時計まわりを正の向きに，時計まわりを負の向きにまわると言うことにします．

さて，図 2.7 で実軸と線分 OP のなす角度を正の向きにはかって θ としますと OP の長さが $|\alpha|$ であることより

$$\mathrm{Re}\,\alpha = a = |\alpha|\cos\theta$$

$$\mathrm{Im}\,\alpha = b = |\alpha|\sin\theta$$

であることが分かります．書き換えると

$$\alpha = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.1}$$

であることが分かりました．この角度 θ のことを複素数 α の**偏角**といい $\arg\alpha$ と記します．偏角は通常 0 から 2π の間にとることが多いのですが，図 2.9 のように偏角としては $2\pi+\theta$ や負の向きにはかって $-(2\pi-\theta) = \theta - 2\pi$ など，θ に 2π の整数倍を足しても引いてもよいことが分かります．(2.1)の右辺で θ を $\theta+2\pi n$，n は整数と変えても値が変わらないことは三角函数の周期性から分かります．そこで複素数 α の偏角 $\arg\alpha$ は 2π の整数

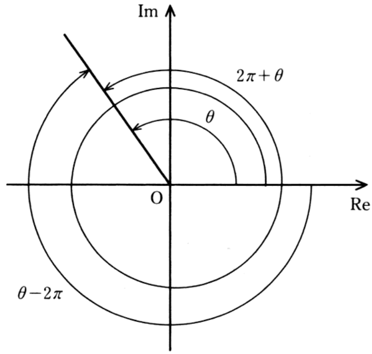


図 2.9

倍だけをいつも無視して考えます．そうした方が便利であることが次第に分かっていただけると思います．(2.1)の表示式を複素数の**極座標表示**とよびます．

さて，複素数 α, β が与えられ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)\\ \beta=|\beta|(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

と極座標表示したとき，積 $\alpha\cdot\beta$ の極座標表示を求めてみましょう．直接(2.2)式の積をとると

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta&=|\alpha|\,|\beta|(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\\&=|\alpha|\,|\beta|\{(\cos\theta\cos\vartheta-\sin\theta\sin\vartheta)+i(\sin\theta\cos\vartheta+\cos\theta\sin\vartheta)\}\end{aligned}$$

となり，三角函数の加法公式を使うことによって

$$\alpha\cdot\beta=|\alpha|\,|\beta|(\cos(\theta+\vartheta)+i\sin(\theta+\vartheta)) \tag{2.3}$$

を得ます．これが積 $\alpha\cdot\beta$ の極座標表示ですが，この式は複素数の積の幾何学的意味を教えてくれます．複素数 α, β, γ に対応する複素平面上の点を P, Q, R とします．点 P, Q が与えられたとき R をどのように見付けるかが問題です．まず(2.3)から線分 OR の長さは線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積であることが分かります．また実軸の正の部分と OR との角度は $\theta+\vartheta$ であることが分かります．したがって複素平面で $\alpha\cdot\beta$ に対応する点 R は線分 OP を線分 OQ の長さ倍だけし，それを ϑ だけ回転して求めることができま

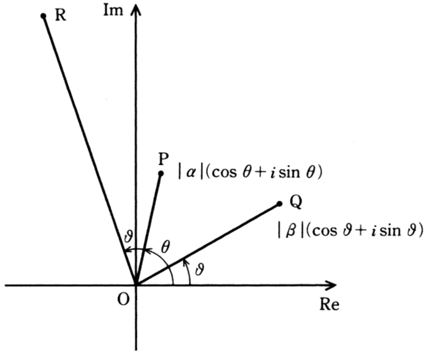


図 2.10

す．特に $|\beta|=1$ であれば，OR は OP を β の偏角 $\arg\beta$ だけ回転したものとなっていることが分かります(図 2.10)．

積の幾何学的意味が分かりましたから，商の幾何学的意味もお分かりのことと思います．

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}(\cos(\theta-\vartheta)+i\sin(\theta-\vartheta)) \tag{2.4}$$

は直接計算によっても，あるいは $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\beta=\alpha$ に(2.3)を適用することによっても示すことができます．(2.4)を使って $\frac{\alpha}{\beta}$ の幾何学的な表示を得ることはみなさんの演習問題としましょう．

ところで(2.3)，(2.4)より

$$\left.\begin{aligned}\arg(\alpha\cdot\beta)&=\arg\alpha+\arg\beta\\ \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)&=\arg\alpha-\arg\beta\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

が成り立つことが分かります．この等号の意味は，正しくは 2π の整数倍の差を除いて両辺が等しいということです．たとえば，偏角を 0 から 2π の間にとれば

$$\arg i=\frac{\pi}{2},\qquad \arg(-i)=\frac{3\pi}{2}$$

ですが

$$\arg i\cdot(-i) = \arg 1 = 0$$

となります．合同式をご存知の方は(2.5)は

$$\arg \alpha\cdot\beta \equiv \arg \alpha + \arg \beta \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

などと書いた方がよいことに気付かれると思います．第5章§3で $\arg z$ を z の函数と考えることができること，多価性(z に対して $\arg z$ が 2π の整数倍を足しても引いてもよいこと)をどのように考えたらよいかお話したいと思います．言い忘れましたが $\arg 0$ は定義できません．じつはこのことが，$\arg z$ の多価性と密接に関係していることが分かります．

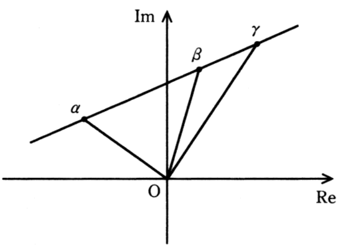
さて，今までは複素数 α を表示する複素平面上の点をPなどと書いてきましたが，これからは複素平面上の対応する点も α と記すことにしたいと思います．こうすることによって，記号を節約することができますし，複素数の持つ幾何学的意味がはっきりすることと思います．複素数を複素平面に表示することによって平面幾何の問題を複素数を使って解くこともできます．そのいくつかは最後に演習問題としますので挑戦してみてください．その際，等式(2.5)が大切な役割をすることに注意してください．

演習問題

1. 複素平面上の相異なる3点 α, β, γ が一直線上にあるための必要かつ十分条件は

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \text{ が実数}$$

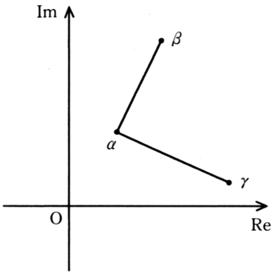
であることを示せ．



2. 複素平面上の相異なる 3 点 α, β, γ に対して，α を始点とする 2 つの線分 $\overline{\alpha\beta}, \overline{\alpha\gamma}$ が直交するための必要十分条件は

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \text{ が純虚数}$$

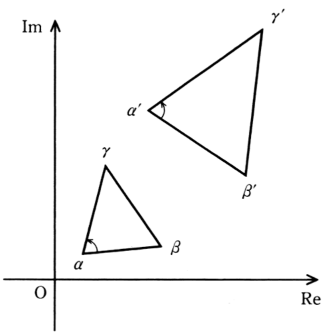
であることを示せ．



3. 複素平面に相異なる 3 点 α, β, γ および α', β', γ' が与えられたとき，$\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ とが相似であるための必要十分条件は

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'}$$

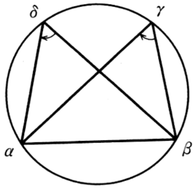
であることを示せ．



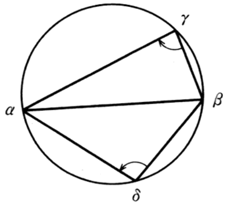
4. 複素平面上の相異なる 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が同一円周上にあるかまたは同一直線上にあるための必要十分条件は

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\bigg/\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}\ \text{が実数}$$

であることを示せ．



$\angle\beta\gamma\alpha=\angle\beta\delta\alpha$



$\angle\beta\gamma\alpha+\angle\beta\delta\alpha=\pi$

質問コーナー

質問 1　複素平面という言葉が出てきましたが，高校では複素数平面と習いました．複素平面と複素数平面とは違うものでしょうか．この本の説明からは同じものとしか思えないのですが．

質問に答えて

複素平面と複素数平面とは同じものです．英語では complex plane といいます．数直線というから複素数平面というべきであると主張する人がいて，文部省が複素数平面に決めたと聞いています．しかし数学の世界では複素平面が世界的に通用する用法です．数学の用語は慣習であり，ことさら異を唱えて新しい用語を作ることは間違っていると思います．§1 で少し述べましたが，有理数も正確な意味では rational number の誤訳です．複素数平面を使うのであれば数直線は実数直線というべきでしょう．

用語というのは約束ですから，広く使われている用語を使う方がよいと思います．また，これもすでに述べましたが，方程式の根という大切な用語を高校数学から追放して解だけを使おうとするのでつまらない混乱が生じています．数学教育者を自認する人達は小学校の算数，中学，高校の数学も数学

の一部分であることを認識すべきだと思います．

質問2　複素数はベクトルですか．そうすると数ではないと思うのですが．

質問に答えて

複素数は実部と虚部の組と見ることもでき，平面上のベクトルと見ることもできます．複素数を平面上のベクトルと見ると複素数の加法，減法はベクトルの加法，減法に対応しています．一方，複素数の積はベクトルとしての演算ではありません．ですから複素数を単に平面上のベクトルとして**のみ**考えることはできません．

§3　単位円周上の複素数と 1 の n 乗根

$|z| = 1$ は複素平面上で単位円になることは，既に述べました(図 2.7)．(2.1)より絶対値 1 の複素数は

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

と書くことができます．オイラーにならって

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.1}$$

とおきましょう．e は自然対数の底ですが，e の虚数乗とは何だろうと疑問に思われる方も多いと思います．第 4 章§1 で複素数の指数函数 e^z を定義しますが，そのときまで $e^{i\theta}$ の意味づけは待っていただきたいと思います．今は(3.1)の右辺が $e^{i\theta}$ の定義と思っていただいて結構です．

$$e^{i\theta_1} = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1,$$

$$e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

と単位円周上の 2 点をとると，(2.3)より

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{3.2}$$

であることが分かります．これは $e^{i\theta}$ が通常の指数函数と類似の性質を持っていることを示唆しますが，(2.3)の証明より明らかなように(3.2)はじつは三角函数の加法公式に他なりません．$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ として(3.2)を適用すると $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ を得ます．さらに(3.2)を適用することによって

$$(e^{i\theta})^3 = (e^{i\theta})^2 \cdot e^{i\theta} = e^{2i\theta} \cdot e^{i\theta} = e^{3i\theta}$$

を得ます．以下これと同様にして，任意の自然数 n に対して

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \tag{3.3}$$

が成り立つことが分かります．(3.3)は(3.1)を使うと

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{3.4}$$

が成り立つことと同じであることが分かります．(3.4)をド・モアブルの公式とよびます．(3.4)の左辺を展開することによって $\cos n\theta, \sin n\theta$ の n 倍角の公式を得ることができます．

(3.3), (3.4)を使うと，方程式

$$z^n = 1 \tag{3.5}$$

を簡単に解くことができます．(3.5)より $|z|^n = 1$ ですので，$|z| > 0$ より

$$|z| = 1$$

であることが分かります．したがって，方程式(3.5)の根はつねに絶対値が1であり，$e^{i\theta}$ の形をしていることが分かります．これが(3.5)を満足するわけですから

$$e^{in\theta} = 1$$

となります．これは

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = 1$$

を意味しますので $n\theta$ は 2π の整数倍であることが分かります．これより，(3.5)の根は

$$e^{2\pi i/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$e^{4\pi i/n} = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$e^{6\pi i/n} = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots$$

$$e^{2(n-1)\pi i/n} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

$$e^{2n\pi i/n} = e^{2\pi i} = 1$$

の n 個であることが分かります．$n = 2$ であれば，これは ± 1 であり，$n =$

3 であれば

$$\omega = e^{2\pi i/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega^2 = e^{4\pi i/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となり，§1 で計算した結果と，もちろん一致します．

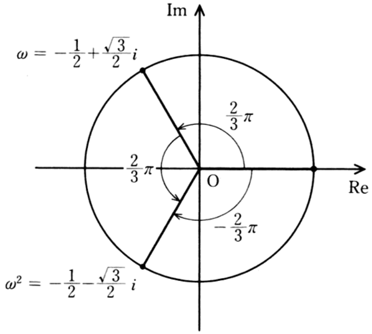


図 3.1

演習問題

1. 1 の 5 乗根を具体的に求めよ．

第2章

1次分数変換とリーマン球面

§1　1次分数変換

複素数と複素平面について，ある程度のイメージがつかめたと思いますので，この節からはこれまで学んできたことを使って，複素数の持つ幾何学的性質をさらに詳しく調べてみたいと思います．いささか天下り的ですが，複素平面 $\boldsymbol{C}$ から自分自身への“写像”

$$l(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{1.1}$$

を考えてみましょう．（“写像”と書いたのは $cz_0+d=0$ となる z_0 では写像にならないからです．この点に関しては後に詳しく述べますので，とりあえずは l は写像であると考えてください．）　まず l が1対1の写像(単射ともいう)である条件を求めましょう．相異なる複素数 z_1, z_2 に対して

$$l(z_1)=l(z_2)$$

が成立したと仮定しましょう．すなわち

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{az_2+b}{cz_2+d} \tag{1.2}$$

が成立したと仮定しましょう．(1.2)が成り立てば，分母を払って簡単な計算をすると，

$$(ad-bc)(z_1-z_2)=0 \tag{1.3}$$

が成り立つことがわかります．$z_1 \neq z_2$ と仮定したので，l が1対1の写像でなければ

$$ad-bc=0$$

が成り立つことが分かります．そこで，以下は

$$ad-bc \neq 0 \tag{1.4}$$

を満足する複素数 a, b, c, d のみを考え

$$l(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.5}$$

を**1次分数変換**とよぶことにします．(1.4)を満足する複素数 a, b, c, d を与えると1次分数変換が定まることになります．そこで，行列の記号

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

を使い，a, b, c, d より定まる1次分数変換(1.5)を

$$l_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

と記すことにしましょう．すると，(1.4)の条件は，行列 M の行列式 $\det M$ に関する条件

$$\det M \neq 0$$

と書くことができます．

行列を知らない諸君もいると思いますので，簡単に説明しておきます．4つの複素数 a, b, c, d を(1.6)のように並べたものを2行2列の複素行列とよびます．(以下，簡単のため，単に行列とよびます．) 行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

に対して，和および差を

$$M \pm N = \begin{pmatrix} a \pm a' & b \pm b' \\ c \pm c' & d \pm d' \end{pmatrix} \quad \text{(複号同順)}$$

と定義し，積を MN と書いて

$$MN = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

と定義します．さらに，任意の複素数 α と行列 M との積 αM を

$$\alpha M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

と定めます．

以上で，行列の全体に加法，減法，乗法が定義できました．通常の数の計算と同じように思えますが，一般に，2つの行列 M と N の積はかける順序によって結果が違ってくることを注意しておきます．たとえば

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．ところで

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，任意の行列 M に対して

$$MO = OM = O$$

$$MI = IM = M$$

が成り立つことが容易に分かります．行列 O はちょうど数の 0 のように，行列 I は数の 1 のような働きをすることが分かります．そこで O を零行列，I を単位行列とよびます．通常の数の計算と違うところは，上で述べたように一般に $MN \neq NM$ となることと，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

のように O とは違う行列をかけて O になることがある点です．

さて，行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その行列式 $\det M$ を

$$\det M = ad - bc$$

と定義します．行列の全体を $M_2(\boldsymbol{C})$ と記すと，行列 M にその行列式 $\det M$ を対応させることによって，写像

$$\det : M_2(\boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \det M = ad - bc$$

が定義できます．このとき，この写像は次の大切な性質を持つことが分かります．

補題 1.1　$M, N \in M_2(\boldsymbol{C})$ に対して

$$\det(MN) = \det M \det N$$

証明　$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

とおいて，直接計算によって示す．

$$\det M = ad - bc, \quad \det N = a'd' - b'c'.$$

一方

$$MN = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \det MN &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') \\ &= (ad - bc)a'd' - (ad - bc)b'c' \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \\ &= \det M \det N \end{aligned}$$

となり，補題が証明された．

この補題から，特に $\det M \neq 0, \det N \neq 0$ であれば，$\det(MN) \neq 0$ であることが分かります．また，$\det M = 1$，$\det N = 1$ であれば $\det(MN) = 1$ であることも分かります．このことを念頭において $M_2(\boldsymbol{C})$ の部分集合 $GL(2, \boldsymbol{C}), SL(2, \boldsymbol{C})$ を

$$GL(2, \boldsymbol{C}) = \{M \in M_2(\boldsymbol{C}) \mid \det M \neq 0\}$$
$$SL(2, \boldsymbol{C}) = \{M \in M_2(\boldsymbol{C}) \mid \det M = 1\}$$

と定めます．上で述べたことより，

系 1.2　1)　$M, N \in GL(2, \boldsymbol{C})$ であれば，$MN \in GL(2, \boldsymbol{C})$．さらに 0 でない複素数 α に対して $\alpha M \in GL(2, \boldsymbol{C})$．

2)　$M, N \in SL(2, \boldsymbol{C})$ であれば $MN \in SL(2, \boldsymbol{C})$．また $-M \in SL(2, \boldsymbol{C})$．

が成り立つことが分かります．

行列については，もう少し述べたいことがありますが，1 次分数変換に話題を戻すことにしましょう．上の記号を使えば，$M \in GL(2, \boldsymbol{C})$ に対して，1 次分数変換 $l_M(z)$ が定まります．まず，次のことに注意します．

補題 1.3　$M \in GL(2, \boldsymbol{C})$ および 0 でない複素数 α に対して

$$l_M(z) = l_{\alpha M}(z)$$

が成り立つ．

証明　$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\alpha M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ なので

$$l_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha az+\alpha b}{\alpha cz+\alpha d} = l_{\alpha M}(z)$$

となり，補題が示された．

特に M を単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にとると，対応する 1 次分数変換は

$$l_I(z) = z$$

となり，1 次分数変換は恒等写像(複素平面 $\boldsymbol{C}$ の各点 z に z を対応させる写像)であることが分かります．したがって，0 でない複素数 α に対して，$\alpha I = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ に対応する 1 次分数変換も恒等写像であることが分かります．

次に，2 つの行列 $M, N \in GL(2, \boldsymbol{C})$ に対応する 1 次分数変換 $l_M(z), l_N(z)$ に対して，その合成を考えてみましょう．すなわち，点 z を点 $w = l_N(z)$ へうつし，次に点 w を $l_M(w)$ へうつすことを考えてみましょう．図式的に書けば

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{C} & \xrightarrow{l_N} & \boldsymbol{C} & \xrightarrow{l_M} & \boldsymbol{C} \\ z & \longmapsto & l_N(z) & \longmapsto & l_M(l_N(z)) \end{array}$$

と，写像の合成を考えることになります．(l_N, l_M は正確には $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像とは言えませんが，こう考えてもよいことがやがて分かります．)

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad N=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

とおいて，計算してみましょう．

$$w=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

$$l_M(w)=\frac{aw+b}{cw+d}=\frac{\dfrac{a(a'z+b')}{c'z+d'}+b}{\dfrac{c(a'z+b')}{c'z+d'}+d}$$

$$=\frac{(aa'+bc')z+ab'+bd'}{(ca'+dc')z+cb'+dd'}$$

$$=l_{MN}(z)$$

が成り立ちますので，次の補題が証明されました．

補題 1.4　1 次分数変換 l_N と l_M との合成 $l_M \circ l_N$ は 1 次分数変換であり

$$l_M \circ l_N(z) = l_{MN}(z)$$

が成り立つ．すなわち写像の合成には行列の積が対応する．

具体例で，補題 1.4 を再度確かめておきましょう．1 次分数変換

$$l_1(z)=\frac{1}{z}$$

は，行列 $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対応します．

$$l_1(z)=l_N(z)$$

となります．また，1 次分数変換

$$l_2(z)=z+1$$

は行列 $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応します．まず 1 次分数変換 $l_1=l_N$ を施し，次に $l_2=l_M$ を施すと

$$l(z)=l_2 \circ l_1(z)=l_2(l_1(z))$$

$$=l_1(z)+1=\frac{1}{z}+1=\frac{z+1}{z}$$

となります．

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ですので，$l(z) = l_{MN}(z)$ となり，たしかに補題 1.4 が成立しています．ところで，1 次分数変換 $l_2 = l_M$ を最初に施し，次に $l_1 = l_N$ を施してできる 1 次分数変換は

$$\begin{aligned} m(z) &= l_1 \circ l_2(z) = l_1(l_2(z)) \\ &= \frac{1}{l_2(z)} = \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

となります．一方

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ですので，このときも確かに $m(z) = l_{NM}(z)$ が成り立っています．

それでは，1 次分数変換 $l_M(z)$ に対して，その逆写像，すなわち

$$w = l_M(z), \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のとき，w に対して z を対応させる写像

$$z = l(w)$$

はどのように表すことができるでしょうか．

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

を逆に解いてみると，簡単な計算によって

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a} \tag{1.7}$$

であることが分かります．

$$N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと，$\det N = ad-bc \neq 0$ となり，(1.7) も 1 次分数変換であることが分かります．ところで

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= (ad-bc)I \end{aligned}$$

$$NM = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$
$$= (ad-bc)I$$

ですので

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}N \tag{1.8}$$

とおくと，

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I \tag{1.9}$$

が成り立ちます．一般に，行列 M に対して

$$MN = I \tag{1.10}$$

が成り立つ行列 N が存在するとき N は M の逆行列であるといい，M^{-1} と書きます．$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 M^{-1} が(1.8)で与えられることは(1.9)より分かります．なお(1.10)より

$$\det M \det N = \det(MN) = \det I = 1$$

となり，逆行列が存在するためには $\det M \neq 0$ であること，すなわち $M \in GL(2, \boldsymbol{C})$ でなければならないことに注意します．さらに(1.10)が成り立てば

$$NM = I$$

が成り立つことも分かります．これは，演習問題としておきます．以上をまとめて，次の結果が示せました．

補題 1.5　1次分数変換 $l_M(z)$ の逆写像 $l_M{}^{-1}(z)$ も1次分数変換であり，

$$l_M{}^{-1}(z) = l_{M^{-1}}(z)$$

が成り立つ．

以下，1次分数変換の全体を $PGL(2, \boldsymbol{C})$ と表すことにします．このとき，

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & GL(2, \boldsymbol{C}) & \longrightarrow & PGL(2, \boldsymbol{C}) \\ & M & \longmapsto & l_M \end{array} \tag{1.11}$$

という写像が定義でき，$M, N \in GL(2, \boldsymbol{C})$ に対して，その積 MN には l_{MN} が対応しますが

$$l_{MN} = l_M \circ l_N$$

が成立し，また，M^{-1} に対応する1次分数変換 $l_{M^{-1}}$ は

$$l_{M^{-1}} = {l_M}^{-1}$$

より l_M の逆写像であることが分かります．このことは，Λ が群の準同型写像であることを意味しますが，このことについては演習問題を参照してください．

ところで $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \boldsymbol{C})$ に対して

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}} & \dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}} & \dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}} M$$

は $\det \tilde{M} = 1$ となり，$\tilde{M} \in SL(2, \boldsymbol{C})$ であることが分かります．一方

$$l_M(z) = l_{\tilde{M}}(z)$$

ですので，(1.11)の写像と同様に写像

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\Lambda}: & SL(2, \boldsymbol{C}) & \longrightarrow & PGL(2, \boldsymbol{C}) \\ & \tilde{M} & \longmapsto & l_{\tilde{M}} \end{array}$$

は上への写像である，すなわち，任意の1次分数変換 $l(z)$ に対して，

$$l(z) = l_{\tilde{M}}(z)$$

となる $\tilde{M} \in SL(2, \boldsymbol{C})$ が存在することが分かります．たとえば，1次分数変換

$$l(z) = \frac{1}{z}$$

に対しては

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{C})$$

によって

$$l(z) = l_{\tilde{M}}(z)$$

であることが分かります．また，0 でない複素数 α に対して，1 次分数変換

$$l(z) = \alpha z$$

は

$$l(z) = l_{\tilde{M}}(z), \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}$$

と表示できることが分かります．

以上で，1 次分数変換と行列との関係は分かったものとして，1 次分数変換の持つ性質を調べていきたいと思います．1 次分数変換は複素平面 $\boldsymbol{C}$ から自分自身への“写像”と最初に記しましたが，その意味はなんなのでしょうか．たとえば，1 次分数変換

$$l(z) = \frac{1}{z}$$

を考えてみますと，これは $z=0$ では値が定義できませんので，$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像ではありません．また，1 次分数変換

$$l(z) = \frac{2z+1}{5z+i}$$

では，$z = -\dfrac{i}{5}$ では値が定義できず，$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像ではありません．一般に，1 次分数変換

$$l(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

は $c \neq 0$ であれば $z = -\dfrac{d}{c}$ で写像として定義できません．そこで，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上で点列 $\{z_n\}$ が $-\dfrac{d}{c}$ に近づくとき，$l(z_n)$ がどうなるか考えてみましょう．z_n が $n \to \infty$ のとき $-\dfrac{d}{c}$ に近づくことは

$$\left| z_n + \frac{d}{c} \right|$$

が $n \to \infty$ のとき 0 に近づくことを意味します．このとき，$|cz_n + d|$ も 0 に近づきます．一方

$$a\left(-\frac{d}{c}\right)+b=-\frac{1}{c}(ad-bc)\neq 0$$

ですので，$n\to\infty$ のとき

$$az_n+b\longrightarrow -\frac{1}{c}(ad-bc)\neq 0$$

となり，このことから $n\to\infty$ のとき

$$|l(z_n)|\longrightarrow\infty$$

であることが分かります．そこで，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上で，その絶対値がどんどん大きくなっていったかなたに仮想的な点 ∞ を導入します．この点 ∞ を**無限遠点**とよびます．複素平面 $\boldsymbol{C}$ に無限遠点 ∞ をつけ加えた $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ を**リーマン球面**とよびます．なぜ，球面とよばれるのかは次節で詳しく述べたいと思います．リーマン球面で考えると，1 次分数変換はリーマン球面から自分自身への上への 1 対 1 写像であることも分かります．これも次節で述べたいと思います．1 次分数変換

$$l(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

に対して，

$$c\neq 0 \text{ のときは } l(\infty)=\frac{a}{c},\quad c=0 \text{ のときは } l(\infty)=\infty$$

と定義できることを宿題としますので考えてみてください．

演習問題

1. 行列

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\boldsymbol{C})$$

に対して

$$MN=I$$

を満足する行列 N はただ一つ存在し

$$N=\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と書けることを示せ．またこのとき

$$NM = I$$

が成り立つことを示せ．（この N を M^{-1} と書く．）

2. 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と縦ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ の積を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix}$$

と定める．x, y に関する連立方程式

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

は，行列の記号を使うと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

と書くことができる．もし

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \boldsymbol{C})$$

であれば，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

とおくと，$x = \alpha$，$y = \beta$ が連立方程式の解であることを示せ．

3. 集合 G の任意の 2 元 a, b に対して，“積” $a \cdot b \in G$ が常に定まり，以下の条件を満足するとき G を**群**という．

1)（結合律）　G の任意の元 a, b, c に対して

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

2)（単位元の存在）　G の任意の元 a に対して

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

を満足する G の元 e が存在する．（e を群 G の単位元という．）

3)（逆元の存在）　G の任意の元 a に対して

$$a \cdot a' = e, \qquad a' \cdot a = e$$

を満足する G の元 a' が存在する．（a' を a の逆元といい，a^{-1} と記す．）

$GL(2, \boldsymbol{C})$, $SL(2, \boldsymbol{C})$ は行列の積に関して群であることを示せ．（単位元

は I である．）　また1次分数変換の全体 $PGL(2, \boldsymbol{C})$ は写像の合成を積と考えることによって，すなわち

$$l_1 \cdot l_2(z) = l_1(l_2(z))$$

と積を定めることによって，群であることを示せ．（単位元は恒等変換 $l_I(z) = z$ である．）　さらに(1.11)の写像 Λ は

$$\Lambda(M \cdot N) = \Lambda(M) \cdot \Lambda(N)$$

を満たすことを示せ．

一般に群 G_1 から群 G_2 への写像 $\lambda: G_1 \to G_2$ が G_1 の任意の2元 g_1, g_2 に対して $\lambda(g_1 \cdot g_2) = \lambda(g_1) \cdot \lambda(g_2)$ を満足するとき**準同型写像**であるという．

質問コーナー

質問　行列がよく分かりません．「2行2列の複素行列」という言葉がでてきましたが，3行1列の行列や4行7列の行列というのはあるのでしょうか．

質問に答えて

mn 個の数 a_{ij} を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように並べたものを m 行 n 列の行列といいます．n 個の数の組 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$ を第1行，$(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$ を第2行，$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ を第 i 行といい m 個の数の組 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を第 j 列といいます．a_{ij} をこの行列の i 行 j 列の成分，あるいは単に (i, j) 成分といいます．この行列を (a_{ij}) と略記することもあります．またすべての a_{ij} が実数のとき実行列，a_{ij} が複素数のとき複素行列といいます．

二つの m 行 n の行列 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ に対して和と差 $A+B, A-B$ を (i, j) 成分がそれぞれ $a_{ij}+b_{ij}, a_{ij}-b_{ij}$ の行列と定義します．したがって $A \pm B$ は m 行 n 列の行列です．

行列の積には注意が必要です．l 行 m 列の行列 $C=(c_{ij})$ と m 行 n 列の行列 $D=(d_{ij})$ に対して積 CD が定義できます．CD の (i, j) 成分を e_{ij} と記すと

$$e_{ij}=c_{i1}d_{1j}+c_{i2}d_{2j}+\cdots+c_{im}d_{mj},$$
$$i=1, \cdots, l, \quad j=1, \cdots, n$$

と定義します．C の i 行と D の j 列の数を掛けて和をとっていることに注意してください．CD は l 行 n 列の行列であり，積は C の列の数と D の行の数が一致するときだけ定義できることに注意します．たとえば

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \end{pmatrix}$$

となります．連立方程式

$$\begin{aligned} x+2y+\ z &= \ \ 3 \\ 2x+3y+\ z &= -2 \\ 5x-\ y+3z &= \ \ 1 \end{aligned}$$

は行列を使うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができます．ここで行列の等号 $A=B$ は A と B とはともに m 行 n 列の行列であり，A と B の (i, j) 成分がすべての i, j で一致することと約束します．

この例から推測されるように，行列の理論は連立1次方程式の理論と密接に関係しています．

§2 リーマン球面

前節の終りで，複素平面 $\boldsymbol{C}$ に仮想的な無限遠点 ∞ をつけ加えると，1次分数変換が写像としての意味を持つことを述べました．この節では，この考え方をさらにおし進めてみたいと思います．

複素数列 $\{z_n\}$ は，その絶対値 $|z_n|$ がどんどん大きくなって行くとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$$

であるとき，無限遠点 ∞ に近づいて行くと考えました．図 2.1 のように，複素平面上では $|z| = R$ は原点を中心とする半径 R の円になります．半径 R がどんどん大きくなって仮想的な点 ∞ に近づくことは，図 2.2 のように複素平面の原点から遠い部分をどんどん持ちあげて，外側をすぼめてゆくことを考えてみると分かりやすいかもしれません．R が大きくなって行くと，図 2.2 の $|z| = R$ の輪が縮まって行き，最後に行きつく先が無限遠点だと考えるわけです．このように考えてみると，複素平面 $\boldsymbol{C}$ に無限遠点 ∞ をつけ加えたもの $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球面とよぶのも納得がいくと思います．ちなみに，リーマン(1826～1866)はこのリーマン球面の考え方を使って，もっと一般のリーマン面を考え，複素函数論や代数函数論を飛躍的に発展させまし

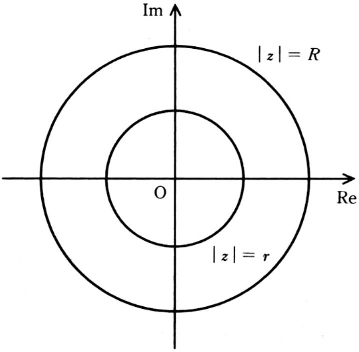


図 2.1

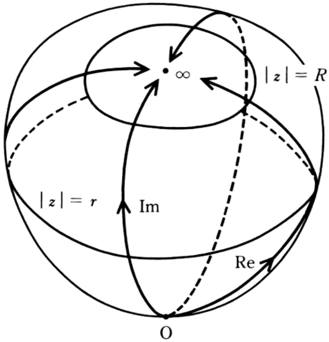


図 2.2

た．そのために，単に球面とよばずに彼の名を冠してリーマン球面とよんでいます．

以上の直観的説明を，数学的にもう少しきちんとした形にしてみましょう．そのために，3 次元空間内に単位球面

$$S^2 : u^2+v^2+w^2=1 \tag{2.1}$$

を考えましょう．w 軸上の点 $\mathrm{N}=(0,0,1)$ をこの単位球面の北極，点 $\mathrm{S}=(0,0,-1)$ を南極とよぶことにします．また (u,v) 平面を複素平面 $\boldsymbol{C}$ と同一視します．すなわち，(u,v) 平面上の点 $\mathrm{P}=(u_0,v_0)$ に複素数

$$u_0+v_0i$$

が対応すると考えるわけです．そこで北極 N と (u,v) 平面上の点 P とを結ぶ直線 $\overline{\mathrm{NP}}$ が単位球面と交わる点を Q とおきます．直線 $\overline{\mathrm{NP}}$ は

$$t(u_0,v_0,0)+(1-t)(0,0,1)=(tu_0,tv_0,1-t) \tag{2.2}$$

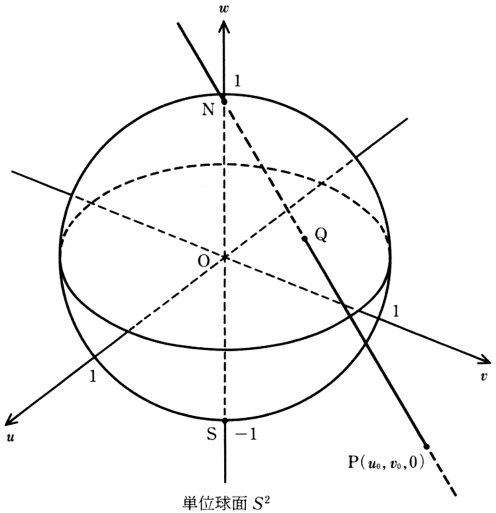
とパラメータ表示できますので，Q の座標を求めるには，(2.2) を (2.1) に代入して

$$(tu_0)^2+(tv_0)^2+(1-t)^2=1$$

を解けばよいことが分かります．これは t に関する 2 次方程式

$$(1+u_0{}^2+v_0{}^2)t^2-2t=0$$

になりますが，$t=0$ は (2.2) より北極 N を表わします．したがって点 Q には



単位球面 S^2

図 2.3

$$t=\frac{2}{1+{u_0}^2+{v_0}^2}$$

が対応することが分かり，(2.2)より

$$\mathrm{Q}=\left(\frac{2u_0}{1+{u_0}^2+{v_0}^2},\ \frac{2v_0}{1+{u_0}^2+{v_0}^2},\ \frac{-1+{u_0}^2+{v_0}^2}{1+{u_0}^2+{v_0}^2}\right)$$

であることが分かります．このようにして，複素平面 $\boldsymbol{C}$ より単位球面 S^2 への写像

$$\begin{array}{cccc} \psi: & \boldsymbol{C} & \longrightarrow & S^2 \\ & z=x+yi & \longmapsto & \left(\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2},\ \dfrac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right) \end{array} \tag{2.3}$$

を定めることができます．これは

$$\psi(z)=\left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{1+|z|^2},\ \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{1+|z|^2},\ \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2}\right) \tag{2.4}$$

と書くこともできます．写像 ψ は単射である，すなわち $\psi(z_1)=\psi(z_2)$ であれば $z_1=z_2$ であることが次のようにして分かります．

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$$

としますと，$\phi(z_1) = \phi(z_2)$ より

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x_1}{1+{x_1}^2+{y_1}^2} &= \frac{2x_2}{1+{x_2}^2+{y_2}^2} \\ \frac{2y_1}{1+{x_1}^2+{y_1}^2} &= \frac{2y_2}{1+{x_2}^2+{y_2}^2} \\ \frac{{x_1}^2+{y_1}^2-1}{1+{x_1}^2+{y_1}^2} &= \frac{{x_2}^2+{y_2}^2-1}{1+{x_2}^2+{y_2}^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

が成り立ちます．この最後の式を

$$1-\frac{2}{1+{x_1}^2+{y_1}^2} = 1-\frac{2}{1+{x_2}^2+{y_2}^2}$$

と書き換えることによって

$$1+{x_1}^2+{y_1}^2 = 1+{x_2}^2+{y_2}^2$$

であることが分かります．このことと，(2.5)の最初と二番目の式より，ただちに

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2$$

であることが分かり，

$$z_1 = z_2$$

であることが示されます．さらに(2.3)の写像 ϕ の像は $S^2-\{\mathrm{N}\}$ であることが分かります．言い換えると，北極以外の単位球面上の点 Q に対して $\phi(z) = \mathrm{Q}$ となる複素数 z も求めることもできます．これは，図 2.3 で N と Q とを結ぶ直線 $\overline{\mathrm{NQ}}$ と (u, v) 平面の交点 P に対応する複素数 z をとればよいことから分かります．具体的に z を求めておきましょう．

$$\mathrm{Q} = (u_1, v_1, w_1)$$

とおくと，Q は北極以外の点ですので

$$(u_1, v_1, w_1) \neq (0, 0, 1)$$

であり，Q は単位球面 S^2 上の点ですので，このことは

$$w_1 \neq 1 \tag{2.6}$$

という条件と同値です．$\phi(z) = \mathrm{Q}$ という条件は

$$z = x + yi$$

とおくと，(2.3)より

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right) = (u_1, v_1, w_1) \qquad (2.7)$$

が成り立つことを意味します．

$$\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} = 1-\frac{2}{1+x^2+y^2} = w_1$$

より，

$$1+x^2+y^2 = \frac{2}{1-w_1}$$

であることが分かります．（ここで，条件(2.6)を使っていることに注意してください．）　この等式と(2.7)より

$$x = \frac{u_1}{1-w_1}, \qquad y = \frac{v_1}{1-w_1}$$

であることが分かり，

$$z = \frac{u_1}{1-w_1}+\frac{v_1}{1-w_1}i$$

であることが分かります．以上の議論より，(2.3)の写像は，じつは複素平面 $\boldsymbol{C}$ から $S^2-\{\mathrm{N}\}$ への写像

$$\phi : \boldsymbol{C} \longrightarrow S^2-\{\mathrm{N}\}$$

であり，逆写像 ϕ^{-1} が存在し

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : S^2-\{\mathrm{N}\} &\longrightarrow \boldsymbol{C} \\ (u, v, w) &\longmapsto \frac{u}{1-w}+\frac{v}{1-w}i \end{aligned} \qquad (2.8)$$

で与えられることが分かります．

以上で，複素平面 $\boldsymbol{C}$ と単位球面 S^2 との関係が分かりました．単位球面上の除外された点 N(北極)が無限遠点と考えることができることを見てみましょう．まず，$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$ となる複素数列 $\{z_n\}$ をとり，$\phi(z_n)$ を考えてみましょう．

$$z_n = x_n + y_n i$$

とおくと，仮定より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2} = \infty$$

であり，したがって

$$\lim_{n\to\infty}(x_n{}^2+y_n{}^2)=\infty$$

でもあります．このとき，

$$|x_n| \leqq \sqrt{x_n{}^2+y_n{}^2} < \sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2}$$

ですが，$\sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2} \geqq 1$ ですので

$$|x_n| < \sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2} \leqq (\sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2})^2$$
$$=1+x_n{}^2+y_n{}^2$$

が成り立ちます．このことから

$$\frac{|x_n|}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}=\frac{|x_n|}{\sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2}}$$
$$\leqq \frac{1}{\sqrt{1+x_n{}^2+y_n{}^2}}$$

が成り立つことが分かります．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}=0$$

であることが示されました．まったく同様にして

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}=0$$

が示されます．また，$n\to\infty$ のとき

$$\frac{x_n{}^2+y_n{}^2-1}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}=1-\frac{2}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}\to 1$$

ですので，$n\to\infty$ のとき

$$\phi(z_n)=\left(\frac{2x_n}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}, \frac{2y_n}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}, \frac{x_n{}^2+y_n{}^2-1}{1+x_n{}^2+y_n{}^2}\right)\to(0,0,1)$$

であることが分かります．言い換えると，z_n が無限遠点 ∞ に近づくと，対応する単位球面上の点は北極 N に近づきます．これは，図 2.3 で，(u, v) 平面上の点 P が原点から離れて行くほど，対応する単位球面 S^2 上の点 Q に近づくことからもお分かりいただけると思います．逆に，単位球面上の点列 $\{\mathrm{Q}_n\}$ が北極 N に近づくとき，

$$\mathrm{Q}_n=(u_n, v_n, w_n)$$

とおくと，これは

$$w_n \to 1 \tag{2.9}$$

を意味しますが，対応する複素平面上の点 $z_n = \psi^{-1}(Q_n)$ は(2.8)より

$$z_n = \frac{u_n}{1-w_n} + \frac{v_n}{1-w_n} i$$

となり，(2.9)より

$$\lim_{n \to \infty} |z_n| = \infty$$

であることが分かります．このようにして，写像(2.3)を考えることによって，複素平面 $\boldsymbol{C}$ に無限遠点 ∞ をつけ加えたものが，球面と考えられることが分かりました．

このように，(2.3)の写像 ψ をもとにして考えると，リーマン球面の幾何学的な様子がよく分かります．特に注意しておきたいのは，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の直線のことです．図 2.3 で (u, v) 平面を複素平面と見なし，u 軸を実軸，v 軸を虚軸と考えました．この時，u 軸に対応してリーマン球面上では，北極 N を通る大円 l_u(単位球 S^2 の (u, w) 平面による切口)が，v 軸に対応して大円 l_v(単位球 S^2 の (v, w) 平面による切口)が現われます(図 2.4)．もっ

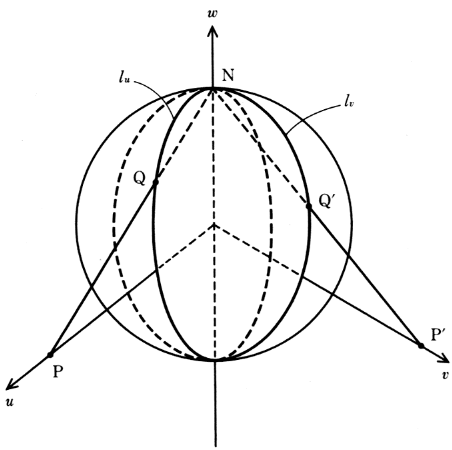


図 2.4

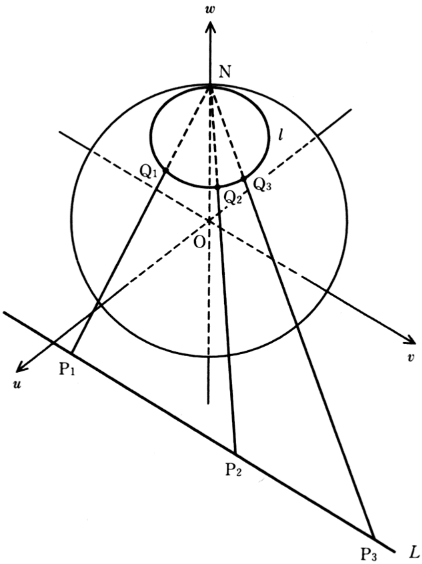


図 2.5

と一般に，(u, v) 平面上の直線 L に対しては，N と L とが張る平面による単位球面 S^2 の切口として，リーマン球面上に北極を通る円 l が現われます (図 2.5)．逆に，リーマン球面上の北極 N を通る円は，単位球面 S^2 と北極 N を通る平面との切口と考えることができますが，この円に対応する複素平面上の図形は，この平面と (u, v) 平面との切口，直線であることが分かります．複素平面上で直線を考えますと，直線上をどちらの向きに進んでも，直線上の点の表す複素数の絶対値は大きくなって行きますので，ついには無限遠点に到達して，そこで直線が閉じてしまったと考えてもかまいません．いずれにせよ，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の直線は無限遠点を通る円，あるいは半径が無限大の円であると考えます．こう考えることによって，1 次分数変換の性質を簡明に言い表すことができるようになります．

無限遠点 ∞ の意味が少しは分かって頂けたと思いますので，無限遠点がどのように役に立つのか，1 次変換を中心に見ていきましょう．そのために，

まず無限遠点での座標を導入します．複素数列 $\{z_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$$

であることは，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}=0 \tag{2.10}$$

であることに注意します．座標という言葉を使いましたが，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の点が表す複素数をそのまま座標と考えることにします．いままでの考え方では，(u,v) 平面の座標 (u,v) に対応する複素数 $z=u+vi$ という言葉遣いをしましたが，今後は z そのものを複素平面の座標(正確には複素座標)として考えます．これからは複素数をもっぱら取扱いますので，この方が便利であることが分かります．

さて，無限遠点は(2.10)に基づいて，座標 w を使って

$$w=0$$

に対応する点と考えます．ただし，複素平面 $\boldsymbol{C}$ の座標 z とは

$$w=\frac{1}{z} \tag{2.11}$$

という関係があると考えます．

なにか奇妙な考え方だと思われるかもしれませんが，リーマン球面(あるいは単位球面 S^2)では一つの座標を使ってすべての点を表示することはできません．そのため，いくつかの座標を使う必要があり，座標の間の関係が大切になります．じつは，リーマン球面は z を座標とする複素平面 $\boldsymbol{C}$ と w を座標とする複素平面 $\boldsymbol{C}$ を，それぞれの原点を除いた所で(2.11)の関係で貼り合わせて得られることが分かっています．こうした考え方は，リーマン球面の考え方をさらに一般化してリーマン面を考えるとき大切になります．

以上の準備のもとに，1次分数変換

$$l(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\boldsymbol{C})$$

を考えてみましょう．座標 w を使うと，(2.11)の関係式より

$$l(z) = \frac{a+b\cdot\frac{1}{z}}{c+d\cdot\frac{1}{z}} = \frac{a+bw}{c+dw} \tag{2.12}$$

と書けますので，$c \neq 0$ であれば(2.12)の右辺で $w=0$ とおくことによって

$$l(\infty) = \frac{a}{c}$$

であることが分かります．$c=0$ のときは

$$l(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{a}{d}\cdot\frac{1}{w} + \frac{b}{d}$$

となり，$w=0$ とおくことはできませんが，

$$\frac{1}{l(z)} = \frac{dw}{a+bw} \tag{2.13}$$

と書くことができ，この右辺で $w=0$ とおいて 0 を得ます．(2.13)で $\frac{1}{l(z)}$ を考えたのは，点 $l(z)$ を座標 w で考えたことを意味します．したがって，$c=0$ のときは

$$l(\infty) = \infty$$

であることもお分かりいただけたと思います．座標を z にとったり，w にとったりして分かりにくいと考えるみなさんも多いようですが，慣れの問題ですので，いろいろな例を計算して，この考え方に慣れてください．

もう少し，別の例を考えてみましょう．1次分数変換

$$l(z) = \frac{z-i}{z+i} \tag{2.14}$$

を考えます．

$$l(0) = \frac{-i}{i} = -1$$

$$l(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

ですが，さらに

$$l(z) = \frac{1-iw}{1+iw}$$

と書けることから

$$l(\infty) = 1$$

であることが分かります．では１次分数変換(2.14)による実軸の像はなんでしょうか？　実軸上の点は

$$z = t, \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

と表されますので

$$\frac{t-i}{t+i}$$

がどのような複素数であるかと問うことと同じことです．

$$\frac{t-i}{t+i} = \frac{(t-i)^2}{(t+i)(t-i)} = \frac{t^2-1-2it}{t^2+1}$$

となりますので，

$$\begin{aligned} \left|\frac{t-i}{t+i}\right| &= \sqrt{\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2t}{t^2+1}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であることが分かります．このことから，実軸に無限遠点をつけ加えて考えると，実軸の像は，原点を中心とする半径１の円(単位円)であることが分かります．では，虚軸の像はどうなるのでしょうか．虚軸上の点は

$$z = it, \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

と表示されますので

$$l(it) = \frac{it-i}{it+i} = \frac{t-1}{t+1} \tag{2.15}$$

となります．特に $l(-i) = \infty$，$l(i) = 0$，$l(\infty) = 1$ ですが，(2.15)から虚軸の像は実軸であることが分かります．このように複素平面上の直線の像は円または直線になることが分かります．(虚軸に平行な直線の像は何かを演習問題にしておきます．)

この事実は１次分数変換(2.14)だけの特別な性質ではなく１次分数変換の持つ大切な性質です．

補題 2.1　１次分数変換は円を円にうつす．

上で述べたように，直線も円の特別な場合と考えます．この証明には，１

次分数変換の持つ次の大切な性質を用います．そのために**複比**を定義する必要があります．

定義 2.2　リーマン球面上の相異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して，

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\bigg/\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} \tag{2.16}$$

を**複比**といい，$(z_1, z_2 : z_3, z_4)$ と記す．ただし，この 4 点のうち 1 点が無限遠点のときは，たとえば $z_1=\infty$ であれば

$$(\infty, z_2 : z_3, z_4) = \frac{z_4-z_2}{z_3-z_2},$$

$z_3=\infty$ であれば

$$(z_1, z_2 : \infty, z_4) = 1\bigg/\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$

と考える．（すなわち，形式的に $\dfrac{a\pm\infty}{b\pm\infty}$ となる部分を 1 とおく．）

補題 2.3　1 次分数変換 $l(z)$ は複比を保つ．すなわち

$$(l(z_1), l(z_2) : l(z_3), l(z_4)) = (z_1, z_2 : z_3, z_4)$$

が成り立つ．

この証明は(2.16)の定義に

$$l(z_j) = \frac{az_j+b}{cz_j+d}$$

を代入すれば形式的な計算だけですので，演習問題とします．ところで，複素平面上の相異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円周上にある条件は第 1 章 §2 の演習問題 4 より，複比 $(z_1, z_2 : z_3, z_4)$ が実数であることが分かります．このことを使って補題 2.1 を証明することができます．

演習問題

1.　1 次分数変換 $l(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ によって単位円 $\{z\in \boldsymbol{C} \mid |z|=1\}$ と実軸に

無限遠点をつけ加えた $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ とが1対1に対応することを示せ．また虚軸に平行な直線の l による像は何か．

2．1次分数変換 $l(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ によって，上半空間

$$H=\{z\in\boldsymbol{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$$

は単位円板

$$D=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|<1\}$$

へうつされることを示せ．

3．1次分数変換(2.14)によって，直線

$$\mathrm{Re}\, z=a, \qquad a\in\boldsymbol{R}$$

は $l(a)$ と1を通り，単位円 $\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|=1\}$ に直交する円にうつされることを示せ．

4．補題2.3および補題2.1を証明せよ．

質問コーナー

質問(読者から)

無限遠点について質問します．

① z_n が無限遠点 ∞ に近づくと，…北極点 N に近づきます〈§2，p. 42〉．ここで，z_n が無限遠点 ∞ に近づくとは，$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ を意味することだと思われますが，$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ における記号"∞"は無限遠点 ∞ とは異なる概念ではないでしょうか．

② 無限遠点に関するこの節の説明は，他の書物でも普通に行われているものですが，私にはまったく理解できません．もっと他の説明がありませんか．

③ §2の最初の部分に出てくる無限遠点と，途中で座標 w によって導入された無限遠点とは同じものですか．この2つの無限遠点の相互の関係が，§2の説明でははっきりしません．

結局，私にとって無限遠点とは真夏の幽霊のようなもので，とらえ所がありません．無限遠点を的確に理解できる道は，無限の彼方にあるのでしょうか．

質問に答えて

① $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$ と無限遠点の記号 ∞ とは，ご指摘のとおりまったく違う概念を表わしています．$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$ は定義通り，z_n の絶対値 $|z_n|$ が n が大きくなるにつれてどんどん大きくなることを意味します．$|z_n| = R_n$ とおくと，$|z_n| = R_n$ は原点を中心として半径 R_n の円周上にあります．$R_n \to \infty$ とはこの半径がどんどん大きくなるわけですが，半径 R_n の円周上の点が $n \to \infty$ で行きつく先が無限遠点です．(u, v) 平面で原点を中心として半径 R_n の円は球面上では w 軸に垂直な平面による球面の切口の円になります．R_n が大きいほど，この切口の円と北極との距離は小さくなります．したがって，複素平面上の点列 $\{z_n\}$ が $|z_n| \to \infty (n \to \infty)$ であれば，対応する球面上の点列 $\{Q_n\}$ は $Q_n \to N(n \to \infty)$ であることが分かります．そこで N に対応する仮想的な点を複素平面につけ加えて無限遠点とよびます．無限遠点を ∞ と記すのは記号の濫用ですが，無限の彼方にある点という感じが出ていると思います．

数学の記号はあくまで約束事ですので，分かりやすい記号を使うのが普通です．無限遠点に ∞ を使うのは，$|z_n| \to +\infty (n \to \infty)$ のとき z_n は無限遠点に近づくことを意味することを表現していると解釈でき，それほど不自然なことではありません．もし，不自然と思われるのであれば，別の記号を使ってもかまいませんが，みんなが使用している記号を使う方が誤解は生じません．

② 無限遠点を考える必要があったのは，一次分数変換

$$l(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

で $c \neq 0$ のとき，点 $z = -\dfrac{d}{c}$ の行き先がないこと，および点 $\dfrac{a}{c}$ にうつされる点が複素平面上にないことでした．たとえば，一次分数変換

$$l(z) = -\frac{1}{z}$$

では，$l(0)$ はもともとは定義できません．$z_n \to 0 (n \to \infty)$ となる点列をとれば

$$\left|-\frac{1}{z_n}\right| \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

となります．図 2.6 の球面で見れば，z_n が 0 に近いときは，$\left|\frac{1}{z_n}\right|$ は大きくなり，$-\frac{1}{z_n}$ に対応する点は北極の近くにあります．そのことから

$$l(0) = \text{無限遠点}$$

と考えることが自然なことが分かります．

リーマン球面をまったく別の観点から考えることも可能です．それはリーマン球面を複素一次元射影空間 $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ と見る方法です．$(a_0, a_1) \neq (0, 0)$ である複素数の対 (a_0, a_1) に対してその比 $a_0 : a_1$ のみを問題にし，この比の全体を $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ と記します．また比 $a_0 : a_1$ は $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ の点 $(a_0 : a_1)$ を定めると考えます．$(a_0, a_1) \neq (0, 0)$ ですので $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ の点は $a_0 \neq 0$ または $a_1 \neq 0$

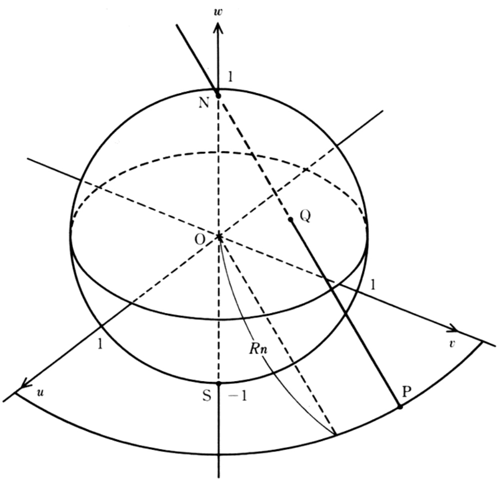


図 2.6

を満足します．そこで

$$U_i = \{(a_0 : a_1) \in \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) \mid a_i \neq 0\},\quad i = 0, 1$$

とおくと

$$U_0 \cup U_1 = \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$$

となります．一方，U_0 の点 $(a_0 : a_1)$ を考えると

$$a_0 : a_1 = 1 : \frac{a_1}{a_0}$$

ですので U_0 の点は $(1 : z)$ の形をしていることが分かります．また任意の複素数 z に対して $(1 : z) \in U_0$ となります．このようにして，写像

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \boldsymbol{C} \\ (a_0 : a_1) & \longmapsto & \dfrac{a_1}{a_0} = z \end{array}$$

によって U_0 と $\boldsymbol{C}$ とが同一視できます．

他方 U_1 では点 $(a_0 : a_1)$ に対して $a_1 \neq 0$ ですので写像

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & \boldsymbol{C} \\ (a_0 : a_1) & \longmapsto & \dfrac{a_0}{a_1} = w \end{array}$$

によって U_1 と複素平面 $\boldsymbol{C}$ とを同一視することができます．ところで $U_0 \cap U_1$ に含まれる点 $(a_0 : a_1)$ では $a_0 \neq 0$，$a_1 \neq 0$ であり，ここでは

$$(a_0 : a_1) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0}\right) = \left(\frac{a_0}{a_1} : 1\right)$$

が成り立ちます．$U_0 \cap U_1$ は

$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{(1 : z) \mid z \neq 0,\ z \in \boldsymbol{C}\} \\ &= \{(w : 1) \mid w \neq 0,\ w \in \boldsymbol{C}\} \end{aligned}$$

と表わせます．$z \neq 0$ のとき

$$(1 : z) = \left(\frac{1}{z} : 1\right)$$

ですから $(1 : z) = (w : 1)$ であることは

$$z = \frac{1}{w} \quad \text{あるいは} \quad w = \frac{1}{z}$$

を意味します．さらに

$$\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) - U_0 = \{(0 : 1)\}$$

$$\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) - U_1 = \{(1:0)\}$$

であり，$(0:1)$ は U_1 で $w=0$ に，$(1:0)$ は U_0 で $z=0$ の点に対応します．すると $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ は二枚の複素平面 $\boldsymbol{C}$（一方の座標は z, 他方の座標は w）を，それぞれの原点を抜いたところを

$$w = \frac{1}{z}$$

という関係で貼り合わせたものと考えることができます．通常の複素平面 $\boldsymbol{C}$ の座標を z としておくと，$|z_n| \to \infty\,(n \to \infty)$ であれば

$$w_n = \frac{1}{z_n} \longrightarrow 0$$

となり，w 平面の方では原点に近づきます．したがって $w=0$, あるいは点 $(0:1)$ が無限遠点になります．射影空間で考えれば

$$(1:z_n) = \left(\frac{1}{z_n}:1\right)$$

ですから $|z_n| \to \infty\,(n \to \infty)$ であれば，この点は $(0:1)$ に近づきます．このようにして，無限遠点をとらえることもできます．

また，このように考えれば，なぜ無限遠点での座標 w を $w=\dfrac{1}{z}$ として導入したかも分かって頂けると思います．これが ③ への解答です．

なお，一次分数変換

$$l(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

は，複素 1 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ では写像

$$L:(a_0:a_1) \longmapsto (da_0+ca_1:ba_0+aa_1)$$

に対応します．$c \neq 0$ のとき $z=-\dfrac{d}{c}$ に対応する $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ の点は $\left(1:-\dfrac{d}{c}\right)=(-c:d)$ であり，このとき写像 L の行き先は

$$(d(-c)+cd:-bc+ad) = (0:ad-bc)$$

となります．$ad-bc \neq 0$ ですので，この点は $(0:1)$ と書け，無限遠点に対応する $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ の点であることが分かります．

第 3 章

無限級数と無限積

§1　多項式と有理函数

前章でリーマン球面を導入し，1 次分数変換はリーマン球面から自分自身への写像と見ることができることを示しました．1 次分数変換については，まだまだ話すべきことがたくさんありますが，それは必要に応じてその都度述べることにして，これから複素数の世界で大切な役割をする無限級数と無限積について述べて行きたいと思います．そのための準備を兼ねて，まず多項式と有理函数について述べましょう．

複素平面 $\boldsymbol{C}$ の座標を z と記し，無限遠点を中心とする座標を w と記すことにします．両者の間には

$$w = \frac{1}{z} \tag{1.1}$$

という関係があります．式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

を z に関する**多項式**とよびます．係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ は複素数であるとします．$a_n \neq 0$ のとき，多項式 $f(z)$ は n 次式であるといいます．以下 $a_n \neq 0$ と仮定しましょう．複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の任意の点 z_0 に対して $f(z_0)$ は複素数ですから，多項式 $f(z)$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ から自分自身への写像と考えることができます．無限遠点を中心とする座標 w を使うと，(1.1) より $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{w} + a_2 \cdot \frac{1}{w^2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{w^n} \\ &= \frac{1}{w^n}(a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + a_2 w^{n-2} + \cdots + a_n) \end{aligned}$$

と書くことができます．したがって $w \to 0$ のとき，$|f(z)| \to \infty$ となり，$f(z)$ は無限遠点に近づくことが分かります．このことから n 次多項式 $f(z)$ はリーマン球面からリーマン球面への写像を定めることが分かります．この事実を，もっとも簡単な n 次式

$$g(z) = z^n$$

で見てみましょう．$g(z)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &\longrightarrow \boldsymbol{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned} \tag{1.2}$$

によって，複素平面から複素平面への写像と考えることができます．二つの複素平面を区別するために，写像の行き先の複素平面の座標を u と記すことにします．また，無限遠点を中心とする座標を v と記すことにしましょう．両者の座標の間には

$$v = \frac{1}{u} \tag{1.3}$$

という関係があります．写像(1.2)は，この座標を使うと

$$u = z^n$$

と表示できます．$z \neq 0$ のところでは(1.1)より

$$u = \frac{1}{w^n}$$

と書けますが，(1.3)を使うと，これは

$$v = w^n$$

と書くことができることが分かります．$w = 0$ の行き先は $v = 0$ ですから，たしかに無限遠点は無限遠点に写され，n 次式 $g(z) = z^n$ は

$$\begin{aligned} z &\longmapsto u = z^n \\ w &\longmapsto v = w^n \end{aligned} \tag{1.4}$$

によってリーマン球面から自分自身への写像と見ることができることが分かります．この写像を g と記すことにします．

この写像をもう少し詳しく見てみましょう．まず，複素平面 $\boldsymbol{C}$ で考えてみましょう．複素数 z を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

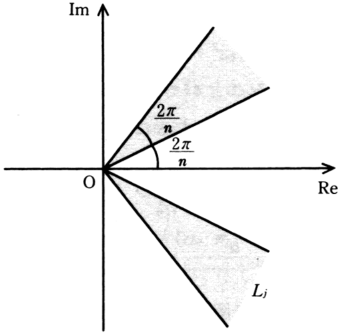


図 1.1

と極座標表示すると

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

となります．複素平面を原点を中心として，実軸の正の部分から出発して，角度が $\dfrac{2\pi}{n}$ の角領域に分割します．

$$L_j = \left\{ r(\cos\theta + i\sin\theta) \,\middle|\, r \geqq 0,\ \frac{2\pi}{n}(j-1) \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{n}j \right\},$$
$$j = 1, 2, 3, \cdots, n.$$

すると，$g(z) = z^n$ によって L_j は複素平面全体へ写されることが分かります．特に，角領域 L_j の境界 $\theta = \dfrac{2\pi}{n}(j-1)$ の部分と，$\theta = \dfrac{2\pi}{n}j$ の部分はともに実軸の正の部分(原点も含めて考える)に写されることが分かります．このことは，写像 g は複素平面 $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像としては，原点を除いたところでは n 対 1 の写像，すなわち相異なる n 個の点が同じ点に写る写像であることを意味します．また無限遠点のまわりでも，(1. 4)より写像は $w \mapsto w^n$ の形になり，上と同じ性質を持つことが分かります．

すなわち，$z^n = \beta$ は $\beta \neq 0, \infty$ であれば $\alpha_1{}^n = \beta$，$\alpha_2{}^n = \beta$，$\cdots$，$\alpha_n{}^n = \beta$ を満足する n 個の複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在し，これらの複素数は $\beta \to 0$ のときは 0 に，$\beta \to \infty$ のときは無限遠点 ∞ に近づきます．これは，$\beta = 0, \infty$ のときは $z^n = \beta$ の解はそれぞれ $0, \infty$ に n 重に重複していると考えることができます．

ところで，一般の多項式

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

に対しても同様の考察をすることができます．$f(z)$ のかわりに $\dfrac{1}{a_n}f(z)$ を考えることによって $a_n = 1$ と仮定することにします．$f(z)$ より定まるリーマン球面から自分自身への写像 f は

$$u = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$$

$$v = \frac{w^n}{a_0w^n + a_1w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}w + 1}$$

と書くことができ，たしかに無限遠点は無限遠点に写っていることが分かります．さらに $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ が 0 に十分近ければ，$f(z)$ から定まる写像 f は，$g(z) = z^n$ から定まる写像 g に十分近いと考えられます．このことから，写像 f も写像 g と同様にリーマン球面からリーマン球面への n 対 1 の写像であると考えられます．このことは，

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + z^n = 0$$

は重複度をこめて n 個の根があること，すなわち $f(\alpha_1) = 0$，$f(\alpha_2) = 0$，$\cdots$，$f(\alpha_n) = 0$ を満たす n 個の複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が原点の近くにあることを意味します．これは，代数学の基本定理に他なりません．このような考え方で，代数学の基本定理を厳密に証明することも可能ですが，もう少し準備が必要になります．本書では，第 4 章 §4 で別の方法を使って代数学の基本定理を証明します．また，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は 0 に十分近いとして考えましたが，代数学の基本定理を証明するにはこれで十分です．なぜならば，$M \neq 0$ に対して，多項式 $f(Mz)$ と考えると

$$\begin{aligned} f(Mz) &= a_0 + a_1Mz + a_2M^2z^2 + \cdots + a_{n-1}M^{n-1}z^{n-1} + M^nz^n \\ &= M^n\left(\frac{a_0}{M^n} + \frac{a_1}{M^{n-1}}z + \frac{a_2}{M^{n-2}}z^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{M^n}z^{n-1} + z^n\right) \end{aligned}$$

と書け，かっこ内の多項式 $h(z)$ の係数 a_j/M^{n-j} は $|M|$ を十分大きくすればいくらでも 0 に近づけることができるからです．また，このとき $h(\alpha) = 0$ であれば $f(M\alpha) = 0$ となり，$f(z) = 0$ の根と $h(z) = 0$ の根とは 1 対 1 に対応するからです．

さて，n 次多項式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

の n 個の根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ と記すと

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n) \tag{1.5}$$

と書くことができます．特に $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \alpha$ であり，$\alpha_j \neq \alpha$，$j \geqq m+1$ のとき，α は $f(z) = 0$ の m 重根であるといいます．また $f(z)$ は α で m **位の零点**を持つといいます．このときは(1.5)より

$$f(z) = (z-\alpha)^m k(z), \qquad k(\alpha) \neq 0 \tag{1.6}$$

と書くことができます．この表示をもとにして，多項式 $f(z)$ が α で m 位の零点を持つための条件を別の形に書いてみましょう．そのために，複素変数 z に関する微分を定義する必要があります．

定義 1.1　複素平面上の点 z_0 を中心とする半径 ε の開円板

$$D = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$$

で定義された複素数に値をとる函数 $f(z)$ は D の点 z_1 に対して

$$\lim_{\substack{z \to z_1 \\ z \neq z_1}} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} \tag{1.7}$$

が存在するとき，点 z_1 で**微分可能**であるといい，極限値(1.7)を $f'(z_1)$ または $\dfrac{df}{dz}(z_1)$ と記します．特に，D のすべての点で微分可能のとき $f(z)$ は D で微分可能であるといいます．このとき $f'(z)$ は D 上の函数と考えることができます．これを $f(z)$ の**導函数**といいます．

この定義は，実数の開区間で定義された実数値函数の微分と形式的にはまったく同じです．ところが z は複素数であることから，z_1 へは種々の方向から様々の形で近づくことができます．したがって(1.7)で極限値が存在することは大変強い条件であることが予想されます．このことは，次第に明らかになってきます．

微分可能性を簡単な函数で調べてみましょう．$f(z) = z$ としますと

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \frac{z-z_1}{z-z_1} = 1$$

ですので，$f(z) = z$ は $\boldsymbol{C}$ の各点で微分可能であり，その導函数 $f'(z)$ は $\boldsymbol{C}$

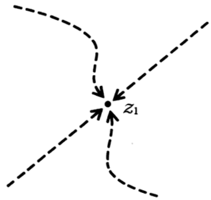


図 1.2　複素平面上では z_1 へは種々の近づき方がある．

の各点で値 1 をとる定数函数になります．

次に $f(z) = z^2$ を考えてみましょう．このときは

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \frac{z^2-{z_1}^2}{z-z_1} = z+z_1$$

ですので，$f'(z_1) = 2z_1$ であることが分かります．したがって $f(z) = z^2$ は $\boldsymbol{C}$ の各点で微分可能であり，その導函数 $f'(z)$ は $2z$ であることが分かります．一般に次の補題を示すことができます．

補題 1.2　任意の正整数 n に対して

$$f(z) = z^n$$

は $\boldsymbol{C}$ の各点で微分可能であり，

$$f'(z) = nz^{n-1}$$

が成り立つ．

証明　$$\frac{z^n-{z_1}^n}{z-z_1} = z^{n-1}+z^{n-2}z_1+z^{n-3}{z_1}^2+\cdots+z{z_1}^{n-2}+{z_1}^{n-1}$$
が成り立つので

$$\lim_{\substack{z\to z_1\\ z\neq z_1}} \frac{z^n-{z_1}^n}{z-z_1} = n{z_1}^{n-1}$$

となり，

$$f'(z_1) = n{z_1}^{n-1}$$

が成り立つ．

ところで複素変数の微分に関しては，通常の実数変数の微分と同様に以下の性質を持つことが分かります．

補題 1.3　$f(z), g(z)$ は点 z_1 で微分可能とする．

1)　任意の複素数 α, β に対して

$$F(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$$

は点 z_1 で微分可能であり

$$F'(z_1) = \alpha f'(z_1) + \beta g'(z_1)$$

が成り立つ．

2)　$G(z) = f(z)g(z)$ は点 z_1 で微分可能であり，

$$G'(z_1) = f'(z_1)g(z_1) + f(z_1)g'(z_1)$$

が成り立つ．

3)　$g(z_1) \neq 0$ であれば，$H(z) = f(z)/g(z)$ は点 z_1 で微分可能であり，

$$H'(z_1) = \frac{f'(z_1)g(z_1) - f(z_1)g'(z_1)}{g(z_1)^2}$$

が成り立つ．

この補題の証明は，実数の場合の証明と形式的にはまったく同じにできるので，みなさんの演習問題にしたいと思います*)．

以上の二つの補題によって，多項式

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

は複素平面の各点で微分可能であり，その導函数は

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + na_nz^{n-1}$$

であることが分かります．さて $f(z)$ は $z = \alpha$ で m 位の零点を持つとしましょう．(1.6) より

$$f(z) = (z-\alpha)^m k(z), \qquad k(\alpha) \neq 0$$

と書けますので，これより

$$f'(z) = m(z-\alpha)^{m-1}k(z) + (z-\alpha)^m k'(z) \tag{1.8}$$

---

*)　たとえば本シリーズ『円周率 π をめぐって』第 3 章 §1 定理 1.3 の証明を参照して下さい．

となり，特に

$$f'(\alpha)=\begin{cases}k(\alpha)\neq 0, & m=1\text{ のとき}\\ 0, & m\geqq 2\text{ のとき}\end{cases} \tag{1.9}$$

が成り立ちます．$f'(z)$ は多項式ですので，再び複素平面の各点で微分可能です．この導函数を $f''(z)$ と記すと，(1.8)より

$$f''(z)=m(m-1)(z-\alpha)^{m-2}k(z)+2m(z-\alpha)^{m-1}k'(z)$$
$$+(z-\alpha)^m k''(z) \tag{1.10}$$

が成り立ちます．これより

$$f''(\alpha)=\begin{cases}2k(\alpha)\neq 0, & m=2\text{ のとき}\\ 0, & m\geqq 3\text{ のとき}\end{cases}$$

が成り立ちます．以下 $f''(z)$ の導函数を $f'''(z)$ または $f^{(3)}(z)$, $f^{(3)}(z)$ の導函数を $f^{(4)}(z), \cdots$ と記すと，上の考察から，次の補題が成り立つことが分かります．

補題 1.4　多項式 $f(z)$ が $z=\alpha$ で m 位の零点を持つための必要十分条件は

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0,$$
$$f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

が成り立つことである．

この補題は第4章で定義する正則函数に対しても正しいことを示すことができます(第4章§4演習問題5)．今までは，多項式という大変よい性質を持った函数を考えたので，微分可能が成り立ちました．しかし，じつは簡単な函数でも微分可能ではない場合があります．そのような例として

$$g(z)=\bar{z}$$

を考えてみましょう．これは複素平面 $\boldsymbol{C}$ の各点 $z=x+yi$ にその複素共役 $\bar{z}=x-yi$ を対応させる函数です．この簡単な函数の点 $z_1=x_1+y_1i$ での微分可能性を調べてみましょう．まず図1.3の直線 l 上で z を z_1 に近づけてみましょう．

$$z=x_1+it$$

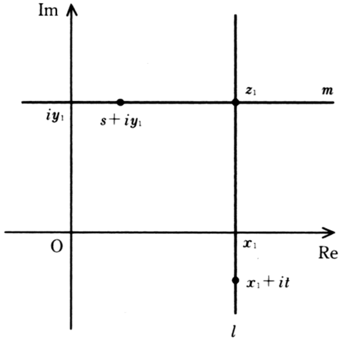


図 1.3

で，$t \to y_1$ を考えます．このとき

$$\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{z-z_1} = \frac{(x_1-it)-(x_1-iy_1)}{(x_1+it)-(x_1+iy_1)} = \frac{-i(t-y_1)}{i(t-y_1)}$$
$$= -1$$

ですので

$$\lim_{\substack{z\to z_1 \\ z\in l}} \frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1} = -1$$

となります．次に，直線 m 上で z を z_1 に近づけてみましょう．このときは

$$z = s+iy_1$$

で，$s \to x_1$ を考えることになりますので

$$\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{z-z_1} = \frac{(s-iy_1)-(x_1-iy_1)}{(s+iy_1)-(x_1+iy_1)} = \frac{s-x_1}{s-x_1} = 1$$

となり，

$$\lim_{\substack{z\to z_1 \\ z\in m}} \frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1} = 1$$

が成り立ちます．したがって

$$\lim_{\substack{z\to z_1 \\ z\neq z_1}} \frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1} \qquad (1.11)$$

は z の z_1 への近づき方によって極限値が違ってきますので，(1.11)の極限値は存在しないことになります．このように，$g(z) = \bar{z}$ は複素平面のどの

点でも微分可能ではありません．同様に，$g(z) = \bar{z}^m$ も微分可能でないことが分かります．

さて，話をもとに戻して，n 次多項式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0$$

を無限遠点の近くで考えてみましょう．無限遠点を中心とする座標 w を使うと，(1.1)より

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_n}{w^n} + \frac{a_{n-1}}{w^{n-1}} + \cdots + \frac{a_2}{w^2} + \frac{a_1}{w} + a_0 \\ &= \frac{1}{w^n}(a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_2 w^{n-2} + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n) \end{aligned} \tag{1.12}$$

と書けます．これは $w = 0$ では通常の意味での値(複素数値)は持ちません．$w = 0$ での写像としての行き先は無限遠点になっています．このとき，$f(z)$ は無限遠点で n **位の極**を持つといいます．(1.12)より

$$f(z) = \frac{1}{w^n}k(w)$$

と書くことができ，$k(w)$ は w に関する多項式であるので，$k(w)$ は $w = 0$ で微分可能です．

さて，多項式について詳しく述べてきましたが，最後に有理函数について簡単に述べておきたいと思います．多項式 $f(z), g(z)$ に対して

$$R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

を有理函数といいます．$f(z), g(z)$ を(1.5)のように1次式の積に分解することによって，共通の因子を約分して，$f(z)$ と $g(z)$ は共通因子を持たないと仮定することができます．このとき $f(z)$ が点 α で m 位の零点を持つとき，言い換えると α は $f(z)$ の m 重根であるとき，α は $R(z)$ の m **位の零点**であるといいます．

$$f(z) = (z-\alpha)^m k(z), \qquad k(\alpha) \neq 0$$

と書くと

$$R(z) = (z-\alpha)^m S(z), \qquad S(z) = \frac{k(z)}{g(z)}$$

と書け，$S(\alpha) \neq 0$ となります．一方，β が $g(z)$ の l 位の零点であるとき，β は $R(z)$ の l **位の極**であるといいます．このとき

$$g(z) = (z-\beta)^l m(z), \qquad m(\beta) \neq 0$$

と書くと

$$R(z) = \frac{1}{(z-\beta)^l} T(z), \qquad T(z) = \frac{f(z)}{m(z)},$$

となり，$T(z)$ は β で極を持たない有理函数であることが分かります．

複素平面上での $R(z)$ の零点を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，$\alpha_j$ での零点の位数を m_j としますと，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ は $f(z)$ の零点であることより

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = \deg f(z) \tag{1.13}$$

であることが分かります．ここで $\deg f(z)$ は多項式 $f(z)$ の次数を表します．また，複素平面上での $R(z)$ の極を $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，$\beta_k$ での極の位数を n_k とすると，これらは $g(z)$ の零点であることより

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = \deg g(z) \tag{1.14}$$

が成り立ちます．ところで無限遠点では $R(z)$ はどのように振る舞うでしょうか．このことを調べるために，無限遠点を中心とする座標 w を使って $R(z)$ を表示し直してみましょう．

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m, \qquad a_m \neq 0$$
$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n, \qquad b_n \neq 0$$

と書くと

$$R(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\dfrac{1}{w^m}(a_0 w^m + a_1 w^{m-1} + \cdots + a_m)}{\dfrac{1}{w^n}(b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_n)}$$
$$= w^{n-m} \cdot \frac{a_0 w^m + a_1 w^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_n}$$

となります．したがって $n > m$ であれば $R(z)$ は無限遠点で $n-m$ 位の零点を持ち，$n < m$ であれば $m-n$ 位の極を持ちます．また $n = m$ であれば $R(\infty) = \dfrac{a_n}{b_n} \neq 0$ となります．(1.13), (1.14) と以上の考察とから次の補題が証明されたことになります．

補題 1.5　有理函数 $R(z)$ のリーマン球面上での零点の位数の和はリーマン球面上での極の位数の和に等しい．

さて，有理函数 $R(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ が無限遠点で極を持つ場合，すなわち $\deg f(z) > \deg g(z)$ である場合を考えてみましょう．このとき，$f(z)$ を $g(z)$ で割ると

$$f(z) = A(z)g(z) + r(z), \qquad \deg r(z) < \deg g(z)$$

と書け，

$$R(z) = A(z) + \frac{r(z)}{g(z)}$$

と書けます．$A(z)$ は $\deg f(z) - \deg g(z)$ 次の多項式になります．これを無限遠点を中心とする座標 w を使って表示すると

$$R(z) = \frac{A_{-l}}{w^l} + \frac{A_{-(l-1)}}{w^{l-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{w} + A_0 + S(w) \tag{1.15}$$

と書くことができます．このとき

$$\deg r(z) < \deg g(z)$$

ですので $S(0) = 0$ となります．(1.15) で w の負ベキの項

$$\frac{A_{-l}}{w^l} + \frac{A_{-(l-1)}}{w^{l-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{w}$$

を有理函数 $R(z)$ の無限遠点での**極の主要部**とよびます．

次に $R(z)$ は複素平面上の点 β_j で位数 n_j の極を持つとしましょう．1次分数変換

$$z \longmapsto \frac{1}{z-\beta_j} \tag{1.16}$$

を施すと，β_j は無限遠点へ写されます．(1.16) の変換によって点 β_j のかわりに無限遠点で考えることは，変数変換

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{z-\beta_j}$$

すなわち，変数変換

$$w = z - \beta_j \tag{1.17}$$

を施して有理函数 $R(w+\beta_j)$ を $w=0$ で考察することを意味します．この

とき，$R(w+\beta_j)$ は $w=0$ で n_j 位の極を持つことが分かります．$R(w+\beta_j)$ の極の主要部を

$$\frac{A^{(j)}{}_{-n_j}}{w^{n_j}}+\frac{A^{(j)}{}_{-(n_j-1)}}{w^{n_j-1}}+\cdots+\frac{A^{(j)}{}_{-1}}{w} \tag{1.18}$$

としましょう．(1.18)を(1.17)を使って $z-\beta_j$ の式として書き直すと

$$R(z)=\frac{A^{(j)}{}_{-n_j}}{(z-\beta_j)^{n_j}}+\frac{A^{(j)}{}_{-(n_j-1)}}{(z-\beta_j)^{n_j-1}}+\cdots+\frac{A^{(j)}{}_{-1}}{z-\beta_j}+S_j(z) \tag{1.19}$$

と書け，$S_j(z)$ は β_j で極を持たない有理函数になります．

以上で次の定理を証明する準備が終りました．

定理 1.6 有理函数 $R(z)$ の複素平面での極を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ として α_j での極の主要部を

$$\frac{A^{(j)}{}_{-n_j}}{(z-\beta_j)^{n_j}}+\frac{A^{(j)}{}_{-(n_j-1)}}{(z-\beta_j)^{n_j-1}}+\cdots+\frac{A^{(j)}{}_{-1}}{z-\beta_j}$$

とする．さらに，無限遠点で $R(z)$ が極を持つ場合はその主要部を

$$\frac{A_{-l}}{w^l}+\frac{A_{-(l-1)}}{w^{l-1}}+\cdots+\frac{A_{-1}}{w}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}R(z)&=\sum_{j=1}^{t}\left\{\frac{A^{(j)}{}_{-n_j}}{(z-\beta_j)^{n_j}}+\frac{A^{(j)}{}_{-(n_j-1)}}{(z-\beta_j)^{n_j-1}}+\cdots+\frac{A^{(j)}{}_{-1}}{z-\beta_j}\right\}\\&\quad+A_{-l}z^l+A_{-(l-1)}z^{l-1}+\cdots+A_{-1}z+c\end{aligned} \tag{1.20}$$

が成り立つ．ここで c は定数である．

証明 (1.20)の和の $z-\beta_j$ の負ベキの項以外は β_j で極を持たない有理函数である．したがって(1.15)および(1.19)より，

$$\begin{aligned}G(z)&=R(z)-\sum_{j=1}^{t}\left\{\frac{A^{(j)}{}_{-n_j}}{(z-\beta_j)^{n_j}}+\frac{A^{(j)}{}_{-(n_j-1)}}{(z-\beta_j)^{n_j-1}}+\cdots+\frac{A^{(j)}{}_{-1}}{z-\beta_j}\right\}\\&\quad-(A_{-l}z^l+A_{-(l-1)}z^{l-1}+\cdots+A_{-1}z)\end{aligned}$$

は $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ および無限遠点で極を持たない．したがって $G(z)$ はリーマン球面上で極を持たず，補題 1.5 より $G(z)\equiv 0$ でない限り $G(z)$ はリーマン球面上で零点を持たない．リーマン球面上で零点も極も持たない有理函数は定数に他ならない．

定理 1.6 に現われる展開式(1.20)を有理函数 $R(z)$ の**部分分数展開**といいます．

この節では，多項式

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

とその因数分解

$$a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

および有理函数の部分分数展開(1.20)が現われました．これらはすべて有限の和および積です．無限和や無限積を考えることができるか，できたとしたらその性質は何かが次節からの主要なテーマになります．

演習問題

1. $D=\{z\in \boldsymbol{C}\,|\,|z-z_0|<\varepsilon\}$ で定義された複素数に値をとる函数 $f(z)$ を $z=x+yi$ と記して 2 変数の函数 $F(x,y)$ と考える．$y=y_1$ をとめて x の函数と考えて x_1 で微分可能のときその微係数を $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1)$，$x=x_1$ をとめて y の函数と考えて y_1 で微分可能のときその微係数を $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1)$ と記す．$f(z)$ が点 $z_1=x_1+y_1i\in D$ で微分可能であれば

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1)=-i\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1)$$

が成り立つことを示せ．

2. $\dfrac{1}{z^2+1}$，$\dfrac{1}{z^3+1}$ を部分分数展開せよ．

質問コーナー

質問 1　この節では有理函数という言葉が使われていますが，高校で習った分数式と同じように思えますが．

質問に答えて

有理函数は有理式ということもあり，分数式と同じです．函数として考えることを強調するために本書では有理函数を使います．有理式は有理数に対

応し，分数式は分数に対応します．

p, q が整数のとき分数 $\frac{q}{p}$ は有理数に他なりません．整数のかわりに多項式(これも整数に対応させて整式ということもあります) P, Q に対して $\frac{Q}{P}$ を分数式といいますが，有理数に対応させて有理式ともいうわけです．さらに函数として考えることを強調するために有理函数といいます．

質問 2　複素数を変数とする函数の微分が出てきましたが，積分もあるのでしょうか．微分と積分とは逆の関係にある(微分積分学の基本定理)と聞きましたが，複素数を変数とする函数でも同様のことが成立するのでしょうか．

質問に答えて

積分については第 4 章 § 2 で説明します．曲線 γ に沿った積分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ を定義することができます．複素平面上の 2 点 z_0, z_1 が与えられたとき $\int_{z0}^{z1} f(z)\,dz$ を定義したいのですが，この積分は z_0 と z_1 とを結ぶ曲線のとり方によって値が変わってきます．このことは第 4 章の中心テーマになります．

また

$$F'(z) = f(z)$$

となる複素数値函数 $F(z)$ が存在するとき，$F(z)$ を $f(z)$ の原始函数といいます．$f(z)$ が連続函数であれば $F(z)$ は局所的に(考えている点の近くでは)存在しますが，大域的に考えると函数の多価性が問題になります．第 5 章 § 3 で述べますが，$\boldsymbol{C}-\{0\}$ での連続函数(実は正則函数) $\frac{1}{z}$ に対して，その原始函数は対数函数 $\log z$ になります．しかし $\log z$ は $\boldsymbol{C}-\{0\}$ 上では多価函数であり，正確には原始函数ではありません．しかしたとえば，$\boldsymbol{C}$ から原点と負の軸を除いたところ D' では一価正則函数と考えることができ，$\frac{1}{z}$ の原始函数となります．このように原始函数は函数をどの部分で考えるかによって違ってきます．

第 4 章での結果を先取りして述べておきますと複素平面 $\boldsymbol{C}$ 全体で正則な函数 $f(z)$ に対しては $\boldsymbol{C}$ 上で原始函数 $F(z)$ が存在し，$\boldsymbol{C}$ の 2 点 z_0, z_1 を結ぶどの区分的に滑らかな曲線 γ に対しても

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

が成立します．したがってこの場合は

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

と書くことができます．これは微分積分学の基本定理の類似と考えることができます．

§2 ベキ級数

前節は，多項式と有理式の基本的な性質についてお話ししました．そこに出て来るものは，すべて有限個の和や積でした．この節では，まず無限和について考えてみたいと思います．多項式

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

のかわりに，無限の和

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots \tag{2.1}$$

と考えてみましょう．z^k の係数を a_k とするとき，(2.1)を通常

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2.2}$$

と記します．Σ は和を表す記号(和 Sum の頭文字 S に対応するギリシア文字シグマ Σ に由来します)で $\sum_{k=0}^{\infty}$ は k を 0 から 1, 2, 3, … と無限まで動かして和をとることを意味します．無限和(2.1)あるいは(2.2)を考えるためには，無限和の意味をはっきりさせる必要があります．そのためには，$k=0$ から n まで $a_k z^k$ を足したもの

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

を考えます．これは有限和ですから，すべての複素数 z に対して値が定まります．n を 0, 1, 2, 3, … と取ることによって，z を一つ定めるごとに，複素数の数列 $\{A_n(z)\}$ が定まります．この複素数の数列が $n \to \infty$ のときある定まった複素数に収束する，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} A_n(z) \tag{2.3}$$

が存在し，その値が A のとき，無限和(2.2)は点 z で**収束**し，その値は A であるといいます．このことを

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = A$$

と記します．一方，数列 $\{A_n(z)\}$ が $n \to \infty$ のとき，定まった複素数に収束しないとき，無限和(2.2)は点 z で**発散**するといいます．発散するときは，無限和(2.2)は意味を持たないことに注意します．

さて，通常，無限和(2.2)は z を複素数の中を動かして考えます．無限和(2.2)のことを通常，**無限級数**，あるいは**ベキ級数**といいます．ベキ級数(2.2)は，収束する範囲内で z の函数と考えることができます．

無限和と有限和の違いを見るために，簡単な例

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+z^{n+1}+\cdots$$

を考えてみましょう．

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1+z+z^2+\cdots+z^n$$

$$= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \tag{2.4}$$

が成り立ちます．複素数 z を極座標表示

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

すると，

$$z^{n+1} = r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\}$$

となります．$r < 1$ であれば

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$$

ですので，

$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$$

であることが分かります．したがって $r = |z| < 1$ のとき，(2.4)より

$$\lim_{n\to\infty} A_n(z) = \frac{1}{1-z}$$

であることが分かり，

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \tag{2.5}$$

であることが分かります．一方，$r = |z| > 1$ のときは

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = +\infty$$

となり，$\lim_{n\to\infty} z^{n+1}$ は存在しません．したがって $|z| > 1$ ではベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は発散します．($|z| = 1$ でもベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は発散することが分かります．節末の質問コーナーを参照して下さい．)

等式(2.5)の意味は，$|z| < 1$ でベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は収束し，その値は $\frac{1}{1-z}$ であるということです．言い換えれば，$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は $|z| < 1$ の範囲では z の函数となり，それは $\frac{1}{1-z}$ に他ならないことになります．

みなさんの中には変な顔をしている人がいます．$\frac{1}{1-z}$ は $z = 1$ 以外の z で値が定まっているのに，(2.5)の左辺 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は $|z| < 1$ でしか意味を持たない．なんだか変だというわけですね．この疑問は大切なことですので詳しく説明したいと思いますが，その前に一般のベキ級数について**収束半径**を定義しておきましょう．そのためには，次の定理が大切な役割をします．

定理 2.1 ベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

が $z = z_0$ で収束すれば，$|z| < |z_0|$ を満足するすべての z でこのベキ級数は収束する．

この定理の証明は，それほど難しくはありませんが，収束に関する議論(ε-δ 法)が必要になりますので，ここでは述べることができません．節末の質問コーナーを参照して下さい．

さて，この定理からベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2.6}$$

の収束に関しては，次の三つの場合しかないことが分かります．

1) すべての複素数 z に対して収束する．

2） $|z| < r$ を満たすすべての複素数 z に対して収束し，$|z| > r$ を満たすすべての複素数 z に対して発散する．

3） $z = 0$ 以外のすべての複素数 z に対して発散する．

このことを示してみましょう．3)でなければ，ベキ級数(2.6)はある複素数 $z_0 \neq 0$ で収束します．$r_0 = |z_0|$ とおくと，定理 2.1 よりベキ級数は $|z| < r_0$ を満たすすべての z で収束します．もし，$|z| > r_0$ を満たすすべての z でベキ級数が発散すれば，2)で $r = r_0$ とおいた場合になります．一方 $|z_1| > r_0$ を満たす z_1 でベキ級数(2.6)が収束すれば，$r_1 = |z_1|$ とおくとこのベキ級数は $|z| < r_1$ を満たすすべての z で収束します．以下，この操作を続けると，(1)か(2)の場合しかないことが分かります．

(1)の場合，ベキ級数(2.6)の**収束半径**は無限大，(2)の場合，収束半径は r，(3)の場合，収束半径は 0 であるといいます．収束半径が無限大のときは，ベキ級数(2.6)はすべての複素数 z に対して収束しますので，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の函数を定めます．一方(2)の場合は，ベキ級数(2.6)は原点を中心とする半径 r の開円板 $\{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| < r\}$ 上の函数を定めます．

では，収束半径はどのようにして求めることができるのでしょうか．次の二つの判定法は，実用上便利です．

定理 2.2　極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r \tag{2.7}$$

が存在するとき（ただし $r = +\infty$ も含める），ベキ級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

の収束半径は r である．ただし，$r = +\infty$ のときは収束半径は無限大である．

定理 2.3　極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} \tag{2.8}$$

が存在すれば，ベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

の収束半径は r である．ただし(2.8)の左辺が $+\infty$ のときは $r=0$，0 のときは $r=\infty$ であると考える．

すでに，上で考察したように，ベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \tag{2.9}$$

の収束半径は 1 です．これは，上の定理 2.2, 2.3 から導くこともできます．(ここでは説明を述べることはできませんが，定理 2.2, 2.3 の証明にはベキ級数(2.9)が $|z|<1$ で収束することを使います．) 複素数 $a \neq 0$ に対して，ベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k \tag{2.10}$$

の収束半径は $\dfrac{1}{|a|}$ になります．これは定理 2.2 または定理 2.3 からただちに分かりますが，ベキ級数(2.9)の収束の議論を使えば，ベキ級数(2.10)は $|az|<1$ を満足するすべての z で収束し，$|az|>1$ を満足するすべての z で発散することからも分かります．

定理 2.2, 2.3 の応用として，いくつかのベキ級数の収束半径を求めてみましょう．まずベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\cdots \tag{2.11}$$

を考えてみましょう．$k \geqq 1$ のとき $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k$ であり，$0!=1$ であると定義します．$a_n = \dfrac{1}{n!}$ ですので

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = n+1$$

となり，定理 2.2 よりベキ級数(2.11)の収束半径は無限大となります．同様にベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots \tag{2.13}$$

の収束半径も無限大であることが分かります．z が実数 x であれば(2.11)は指数函数 e^x のテイラー展開を，(2.12)は三角函数 $\sin x$ の，(2.13)は三角関数 $\cos x$ のテイラー展開になります*)．(2.11), (2.12), (2.13)のベキ級数の収束半径が無限大であることは，これらのベキ級数は複素平面上の函数を定め，したがって指数函数や三角函数が複素平面上の函数として考えることができることを示しています．この点に関しては，第4章§1で改めて詳しく述べたいと思います．

一方，ベキ級数

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k} \tag{2.14}$$

$$1+z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\cdots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2} \tag{2.15}$$

$$1+z+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{3^3}+\cdots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^3} \tag{2.16}$$

の収束半径は1です．たとえば(2.16)では

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

であることから，収束半径は1であることが分かります．同様に，ベキ級数

$$z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k} \tag{2.17}$$

の収束半径も1です．また，ベキ級数

$$\begin{aligned}&1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots\\&\quad+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}z^k\end{aligned} \tag{2.18}$$

は

*) たとえば本シリーズ『円周率 π をめぐって』第2章§4を参照して下さい．

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$$

となり，収束半径は1であることが分かります．ただし，α, β は任意の複素数，γ は0または負の整数でない複素数とします．ベキ級数(2.18)が $|z| < 1$ で定める函数を $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ と書き，**超幾何函数**とよびます．ベキ級数(2.18)は**超幾何級数**とよびます．

ところで，収束半径0のベキ級数の例として

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k = 1+z+2z^2+3!z^3+\cdots+n!z^n+\cdots$$

をあげておきましょう．

さて，前節では多項式の微分を考えました．

$$P(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

に対して

$$P'(z) = a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$$

でした．この計算を形式的に適用すると，ベキ級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kz^k \tag{2.19}$$

に対して

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kz^{k-1} \tag{2.20}$$

と考えることができそうです．微分の定義には極限をとる操作が含まれていました．無限和の定義にも極限をとる操作が含まれていますので，じつは a_kz^k を微分した ka_kz^{k-1} を k に関して無限和をとることと，無限和をとってできた函数 $f(z)$ の微分を考えることとは一致しない危険性があります．しかしながら，ベキ級数(2.19)の収束半径を r とすると，$|z| < r$ では $f(z)$ は微分可能であり，その導函数 $f'(z)$ は(2.20)で与えられること，言い換えれば無限和と微分とが交換可能であること

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_k z^k)$$

を証明することができます．このとき，ベキ級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

の収束半径も r です．このことは，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r$$

であれば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|na_n|}{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$= r$$

であることからも予測できます．(2.11)のベキ級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

に対しては

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1}$$

$$= f(z)$$

となります．(指数函数 e^x に対してその導函数が e^x であることは微積分で学んだ方も多いでしょう．) 同様に，(2.12)，(2.13)のベキ級数を

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

とおくと，

$$g'(z) = h(z)$$

$$h'(z) = -g(z)$$

が成り立つことが分かります．これは

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

と同じ形の式になっています．

さらにベキ級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

に対して，z のかわりに iz を考えると，形式的な計算により

$$\begin{aligned} f(iz) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iz)^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} z^{2l} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} z^{2l+1} \\ &= h(z) + ig(z) \end{aligned}$$

が成り立ちます．これは，

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

に他ならないことを第4章§1で説明します．

今までは，原点を中心とするベキ級数について述べてきました．一般に，複素数 α に対して α を中心とするベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-\alpha)^k \tag{2.21}$$

を考えることができます．これは $w = z-\alpha$ とおけば，今まで考察したベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k$$

になります．このベキ級数の収束半径 r を α を中心とするベキ級数(2.21)の収束半径といいます．この場合，ベキ級数(2.21)は α を中心とする半径 r の開円板

$$D_r(\alpha) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-\alpha| < r\}$$

で函数 $f(z)$ を定めます．この函数 $f(z)$ は $D_r(\alpha)$ の各点で微分可能であり，その導函数は

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k (z-\alpha)^{k-1}$$

で与えられることも，原点を中心とするベキ級数の議論から納得して頂けると思います．

最後に等式

$$1 + z + z^2 + z^3 \cdots + z^n + z^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-z} \tag{2.22}$$

について再度考えてみましょう．(2.22)の左辺のベキ級数の収束半径は1でしたので，等式(2.22)は$|z|<1$でしか意味を持ちません．しかし(2.22)の右辺は$z \neq 1$で意味を持っています．このことをどう考えたらよいのかが問題でした．そのために，複素数$\alpha \neq 1$を使って，次のような式の変形をしてみます．

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\alpha-(z-\alpha)}$$
$$=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha}} \qquad (2.23)$$

$w=\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha}$とおくと$|w|<1$では

$$\frac{1}{1-w}=1+w+w^2+w^3+\cdots$$

とベキ級数展開ができますので，(2.23)より$\left|\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha}\right|<1$では等式

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\alpha}\left\{1+\frac{z-\alpha}{1-\alpha}+\left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha}\right)^2+\left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\alpha)^{k+1}}(z-\alpha)^k \qquad (2.24)$$

が成り立つことが分かります．(2.24)のベキ級数の収束半径は定理2.3より$|1-\alpha|$であることが分かります．言い換えると，(2.24)のベキ級数はαを中心とする半径$|1-\alpha|$の開円板$\{z\in \boldsymbol{C} \mid |z-\alpha|<|1-\alpha|\}$で収束して，そこでは$\dfrac{1}{1-z}$に等しくなります．

したがって，原点を中心とする半径1の開円板Dとαを中心とする半径$|1-\alpha|$の開円板が共通部分を持つときは，この共通部分では，二つのベキ級数(2.22)と(2.24)は同じ関数$\dfrac{1}{1-z}$を定めることが分かります．たとえば図2.1のように単位円板D内の点αをとり，αを中心とするベキ級数(2.24)をとると単位円板の外側の一部まで$\dfrac{1}{1-z}$が定義できます．このように，$\dfrac{1}{1-z}$をベキ級数で表示しようとすると，一つのベキ級数だけでは不十分で，いろいろなベキ級数を使う必要があることが分かります．

別の見方をすれば，点αを中心とするベキ級数の収束半径をrとすると，このベキ級数はαを中心とする半径rの開円板

$$D_r(\alpha)=\{z\in \boldsymbol{C} \mid |z-\alpha|<r\}$$

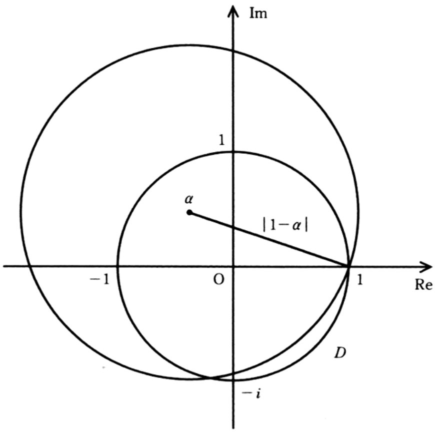


図 2.1

で函数 $f(z)$ を定めますが，$f(z)$ は $D_r(\alpha)$ より大きいところで定義されている可能性があることを意味します．このことは，もっと一般には**解析接続**という考え方にまとめることができ，複素函数論で大切な働きをします．

演習問題

1. 2つのベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

の積は，多項式の積の自然な拡張として

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + \\ + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \cdots$$

と定義する．$a_0 \neq 0$ のとき

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = 1 \qquad \text{(M. 1)}$$

を満足するベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ は一意的に定まり

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0{}^2} z + \frac{a_1{}^2 - a_0 a_2}{a_0{}^3} z^2 - \cdots$$

で与えられることを示せ．また

$$\frac{1}{(1+a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)^2} = 1 - 2a_1 z + (3a_1{}^2 - 2a_2) z^2 + \cdots$$

が成り立つことを示せ．

2. 問題1で，正整数 n に対して

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0, \quad a_n \neq 0$$

が成り立てば，(M. 1)を満たすベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ は存在しないが，負ベキの項を含むベキ級数

$$b_{-n} z^{-n} + b_{-n+1} z^{-n+1} + \cdots + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \tag{M. 2}$$

を使えば

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=-n}^{\infty} b_k z^k\right) = 1$$

を満たすようにできることを示せ．(M. 2)のベキ級数を**ローラン級数**とよぶ．

3. 超幾何級数(2. 18)は微分方程式

$$z(1-z) w'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1) z\} w' - \alpha\beta w = 0 \tag{M. 3}$$

を満たすことを示せ．微分方程式(M. 3)はガウスの微分方程式，あるいは超幾何微分方程式とよばれる．

質問コーナー

質問1　$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ の $|z| = 1$ 上での収束・発散について詳しく説明して下さい．

質問に答えて

$|z| = 1$ である複素数 z は $e^{2\pi i\theta}, 0 \leqq \theta < 1$ と書けます．$\theta = 0$ のとき，すなわち $z = 1$ のとき問題の級数は発散しますので，以下 $0 < \theta < 1$ のときを考えます．このとき

$$\sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i k\theta} = \frac{1 - e^{2\pi i (n+1)\theta}}{1 - e^{2\pi i\theta}}$$

が成立しますので $\sum_{k=0}^{\infty} e^{2\pi ik\theta}$ の収束・発散は，数列 $\{e^{2\pi in\theta}\}$ の収束・発散と同値になります．まず θ が有理数 $\frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な正整数)の場合を考えましょう．このとき

$$e^{2\pi imp\theta} = e^{2\pi iq} = 1$$
$$e^{2\pi i(mp+1)\theta} = e^{\frac{2\pi iq}{p}} \neq 1$$

となり $\{e^{2\pi in\theta}\}$ の $n = mp$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ のときの極限値と $n = mp+1, m = 1, 2, 3, \cdots$ のときの極限値が違うので $\{e^{2\pi in\theta}\}$ は発散します．

次に θ が無理数の場合を考えましょう．この場合

$$\left|\theta - \frac{q_m}{p_m}\right| < \frac{1}{{p_m}^2} \tag{A. 1}$$
$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$$

を満足する有理数 $\frac{q_m}{p_m}$ が存在することが知られています．(この事実についてはたとえば高木貞治『初等整数論講義』共立出版を参照してください．)以下このような有理数列 $\left\{\frac{q_n}{p_n}\right\}$ を考えます．

(A. 1)より

$$\lim_{m\to\infty} (p_m\theta - q_m) = 0$$

であることが分かります．したがって

$$\lim_{m\to\infty} e^{2\pi i(p_m\theta - \delta_m)} = \lim_{m\to\infty} \{\cos 2\pi(p_m\theta - q_m) + i \sin 2\pi\{p_m\theta - q_m)\}$$
$$= \lim_{m\to\infty} \cos 2\pi(p_m\theta - q_m) + i \lim_{m\to\infty} \sin 2\pi(p_m\theta - q_m) = 1$$

が成立します．一方

$$e^{2\pi i(p_m\theta - q_m)} = e^{2\pi ip_m\theta}$$

ですので

$$\lim_{m\to\infty} e^{2\pi ip_m\theta} = 1$$

が成立します．一方

$$\lim_{m\to\infty} e^{2\pi i(p_m+1)\theta} = e^{2\pi i\theta} \cdot \lim_{m\to\infty} e^{2\pi ip_m\theta} = e^{2\pi i\theta}$$

が成立します．これは $\{e^{2\pi in\theta}\}$ の中に1に収束する部分列 $\{e^{2\pi ip_m\theta}\}$ と $e^{2\pi i\theta}$ に収束する部分列 $\{e^{2\pi i(p_m+1)\theta}\}$ が存在することが分かり，$\{e^{2\pi in\theta}\}$ は $n \to +\infty$

のとき収束しないことが示されました．

質問 2　ベキ級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ の収束半径が r のとき $|z| = r$ 上ではベキ級数はいつでも発散するのでしょうか．

質問に答えて

質問 1 の回答を見てそのように思われたかもしれませんが，収束半径が r のとき $|z| = r$ 上のある点でベキ級数が収束する場合もあります．たとえばベキ級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$ の収束半径は定理 2.2 より 1 です．$z = 1$ のとき

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

は発散しますが，$z = -1$ のとき

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

は収束します．またベキ級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ の収束半径も 1 ですが，このときは $|z| = 1$ となるすべての z でベキ級数は収束します．このように $|z| = r$ 上でのベキ級数の収束は複雑で，それぞれのベキ級数の特性に応じた考察が必要となります．

質問 3　定理 2.1 の証明には ε-δ 法が必要になるとありますが，私にも分かるように ε-δ 法を説明して下さい．

質問に答えて

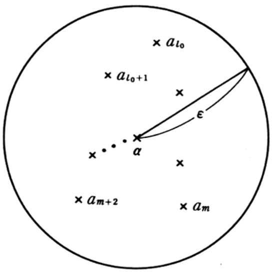
ε-δ 法は第 4 章 § 3 で説明しますが，その準備も兼ねてここでは数列 $\{a_n\}$ の収束を例にとって説明したいと思います．数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき α に収束するというのは，n がどんどん大きくなると a_n が α に近づくことだと定義することで十分だと考えるのが普通でしょう．これで十分に思えますが，数列 $\{a_n\}$ に対して新しい数列 $\{A_n\}$ を

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

と作ると，$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ であれば $\lim_{n \to \infty} A_n = \alpha$ であることを示すことは，上の

素朴な定義ではできません．収束することの意味を深くとらえる必要があります．

さて数列$\{a_n\}$がαに近づくということは，nが大きくなるとき$|a_n-\alpha|$が小さくなることを言い換えることができます．このことをさらに詳しくとらえるためには数$\varepsilon>0$に対して$|a_l-\alpha|<\varepsilon$が成り立つa_lがどれくらいたくさんあるか考えることが大切になります．$|a_n-\alpha|$が小さくなることはnが大きくなるとαを中心とする半径εの円板にa_nが入ることを意味します．このことはεをどんなに小さくとっても成り立ちます．このことから$\lim_{m\to\infty}a_n=\alpha$であることを次のように定義します．



定義 A　どのような正の数εに対しても，次の条件を満足する正整数$N(\varepsilon)$が存在する．($N(\varepsilon)$はεによって値が変わってよい．)

（条件）　$m\geqq N(\varepsilon)$であれば

$$|a_m-a|<\varepsilon$$

が成立する．

この定義を一読しただけでは$\{a_n\}$がαに近づくことを理解するのは容易ではありません．この定義の中に無限のプロセスがこっそり隠されているからです．一番のポイントは「どのような正の数εに対して」と記してあるところです．通常「任意の正の数εに対して」という言い方をしますが同じ意味です．どんな$\varepsilon>0$を選んでもある番号$N(\varepsilon)$より先のa_mはすべてαを

中心とする半径 ε の円板内にあることを定義は主張しています．どんな $\varepsilon > 0$ でもよいのですから，$\varepsilon > 0$ をどんどん 0 に近づけて行くことができ（たとえば ε として $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$ をとることができます），このとき a_n も ε に応じて n が十分大きければ a_n は α からの距離が ε より小さい所にあることから，a_n が α に近づくことが分かると思います．

「近づく」という動的なものを「任意の」という静的な形の言葉に言い換えてしまったので分かりにくいのです．実際には，「任意に $\varepsilon > 0$ を選んで考えることは，ε が 0 に近づくように $\varepsilon > 0$ を選んで考えることを含んでいるので上の定義で問題はまったくありません．第 4 章 §3 で再度説明しますので，それまで時々定義 A の意味を考えてみて下さい．

ところで，ε-δ 法なのに δ が出てこないのを不思議に思われたかもしれません．上では数列を考えたので δ のかわりに $N(\varepsilon)$ が出てきました．函数の連続性や微分可能性を定義するところでは δ が登場します．第 4 章 §3 では δ が登場しますので，詳しくはそこを参照して下さい．

最後に $\lim_{m\to\infty} a_n = \alpha$ であれば $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = \alpha$ を ε-δ 法を使って証明してみましょう．$\lim_{m\to\infty} a_n = \alpha$ ですので，任意に $\varepsilon > 0$ を選ぶと $m \geqq n_0$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように n_0 を選ぶことができます．（定義 A の記号を使えば $n_0 = N(\varepsilon/2)$ ととればよい．）$|a_1 - \alpha|, |a_2 - \alpha|, \cdots, |a_{n_0-1} - \alpha|$ の最大値を M_0 とします．$n > n_0$ のとき

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right| = \left|\frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n}\{|a_1 - \alpha| + |a_2 - \alpha| + \cdots + |a_{n_0-1} - \alpha| + |a_{n_0} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|\}$$

$$< \frac{(n_0 - 1)M}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{(n_0 - 1)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

が成立します．ε から n_0 が決まり，n_0 から M が決まります．そこで $N(\varepsilon)$ を $\frac{2(n_0 - 1)M}{\varepsilon}$ および n_0 より大きい正整数とすると $n \geqq N(\varepsilon)$ であれば

$$\frac{(n_0-1)M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立ちます．すると $n \geqq N(\varepsilon)$ に対して(＊)より

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right| < \varepsilon$$

が成立します．これによって

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$$

が証明されました．

§3　無限級数の収束

無限級数では普通ベキ級数を考えることが多いのですが，この節では，有理函数の部分分数展開にヒントを得て，有理函数からなる無限級数を考えてみましょう．典型的な例として，無限級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} \tag{3.1}$$

を考えてみます．この級数は z が整数 m に等しいところでは意味を持ちませんが，$\dfrac{1}{(z-m)^2}$ 以外の項

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

は $z=m$ の近くでも意味を持ちます．正確な言い方をすれば，(3.1)は $z=m$ の近くでは

$$\frac{1}{(z-m)^2}+h(z) \tag{3.2}$$

と書くことができ，$h(z)$ は $z=m$ の近くのすべての点で微分可能であることが分かります．(このとき，$z=m$ で(3.2)は2位の極を持つといいます．) このことを，少し詳しく見ておきたいと思います．まず(3.1)の n に関する和の部分ですが，n を $-\infty$ から ∞ まで動かすことはそのままではできませんので，正の数 m_1, m_2 に対して有限和

$$g_{m_1,m_2}(z) = \sum_{n=-m_1}^{m_2}\frac{1}{(z-n)^2} \tag{3.3}$$

をとり，$m_1 \to \infty$，$m_2 \to \infty$ としたときに和が定まれば，級数(3.1)は点 z で収束するといいます．少々分かりにくいかもしれませんが，m_1 と m_2 をまったく独立に動かして極限値があることが大切です．(3.3)は

$$\sum_{n=0}^{m_2} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=-m_1}^{-1} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{l=1}^{m_1} \frac{1}{(z+l)^2}$$

と書けますので，無限級数(3.1)が点 z で収束することは，二つの無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(z+l)^2}$$

が点 z で収束することを意味し，(3.1)の無限級数の点 z での値は，この二つの無限級数の点 z での値の和になります．

何か当り前のことを言っているように聞えるかもしれませんが，無限級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n} \tag{3.4}$$

を考えると分かって頂けると思います．無限級数

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{z+l} \tag{3.5}$$

はすべての複素数 z に対して発散しますので，(3.4)は発散して意味を持ちません．(このことは後に示します．) 一方，

$$\begin{aligned} g_m(z) &= \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{m} \left\{ \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right\} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{m} \frac{2z}{z^2-n^2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

となり，$m \to \infty$ のとき $g_m(z)$ は z が整数と等しくなければ収束することを示すことができます．無限和では和の順序を勝手に変えてはいけないことから，時として奇妙なことが起こりますが，

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} \tag{3.7}$$

はその例を与えています．

さて，今まで無限級数の収束について，少し曖昧な形で話しを進めてきました．この機会に収束について，もう少し詳しく述べておきたいと思います．無限級数の収束も，その定義に戻ると，複素数列 $\{\alpha_n\}$ の収束の問題に帰着します．そして複素数列 $\{\alpha_n = a_n + ib_n\}$ の収束は，その実部 $\{a_n\}$ と虚部 $\{b_n\}$

の収束に帰着されます．結局，実数列の収束が基本的なわけです．実数列の収束，発散の問題は，最終的には実数の持つ性質の問題となり，実数をどうとらえるかという問題に行きつきます．

実数論と，極限の概念を正確にとらえる ε-δ 法は，かつては大学１年生の微積分の講義で最初に取り扱われる題材で，分かりにくいと不評でした．最近では，誰も分からないからと，教えない方が主流になりつつあるようです．古代ギリシア以来2000年以上かかってやっと到達した考え方ですので，やさしくはないかもしれませんが，少し時間をかけて考えてみると，その本質は単純明快であることが分かります．長い間かかって築き上げた人類の知的財産をいとも簡単に投げ出していいものか，教育において効率ばかりを追い求め，知的頽廃が広がっている現状に強い危機感を覚えます．

とは言っても，ここで実数論を展開することはできませんので，実数列に関する基本的な事実を認めた上で，最初の問題，無限級数の収束の問題を考えたいと思います．次の定理は実数の持つ大切な性質で，収束・発散に関する議論はこの定理に帰着させることができます．

定理 3.1　実数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots$$

を満足し，かつ有界である，すなわち，すべての a_n に対して

$$a_n < M$$

を満足する実数 M が存在すれば，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

もう一つ大切な事実を述べておきます．

定理 3.2　実数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqq b_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立ち，かつ数列 $\{b_n\}$ が収束すれば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束する．

この定理はじつは定理 3.1 から導くことができます．定理 3.2 の証明には

ε-δ 法が必要です．

また定理 3.2 では a_n の絶対値の和をとることが大切です．$a_k=(-1)^k$ とすると $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqq 1$ ですが $\sum_{k=1}^{n} a_k$ は収束しません．

ところで，数列 $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束しますと，$\{A_n\}$ は有界であることが分かります．極限値を A，すなわち $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ としますと，n が十分大きければ A_n は A の近くにあります．ですから $b>0$ を十分大きくとれば

$$A_l < A+b, \qquad l=1,2,3,\cdots$$

であることは明らかでしょう．たとえば

$$A_n = 1+\frac{1}{n}$$

ですと，$\lim_{n\to\infty} A_n = 1$ ですが，

$$A_1 = 2 > A_2 = \frac{3}{2} > A_3 = \frac{4}{3} > \cdots$$

ですので，たとえば

$$A_l < 3, \qquad l=1,2,3,\cdots$$

が成り立ちます．

さて，定理 3.2 を複素数列 $\{\alpha_n\}$ の場合に拡張しておきましょう．

$$\alpha_n = s_n + it_n$$

と実部と虚部に分けます．すると

$$|s_n| \leqq \sqrt{{s_n}^2+{t_n}^2} = |\alpha_n|$$

$$|t_n| \leqq |\alpha_n|$$

が成り立ちます．もし

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leqq b_n, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

が成り立ち，$\{b_n\}$ が収束するとしますと，上の不等式より

$$\sum_{k=1}^{n} |s_k| \leqq b_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |t_k| \leqq b_n, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

が成立し，定理 3.2 より実数列 $\sum_{k=1}^{n} s_k$, $\sum_{k=1}^{n} t_k$ は収束することが分かります．これは，複素数の無限和 $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ が収束することを意味します．したがって，次の系が証明できました．

系 3.1 複素数列 $\{a_n\}$ に対して，収束する実数列 $\{b_n\}$ が存在し，

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqq b_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立てば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

以上の準備のもとで話を無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{3.8}$$

の収束の問題に戻しましょう．$f_n(z)$ は $a_n z^n$ であったり，$\dfrac{1}{(z-n)^2}$ であったりしますが，とりあえずは $f_n(z)$ は z の函数であるとして，その形は問題にしません．無限級数(3.8)の最初の m 項の和を

$$g_m(z) = \sum_{n=1}^{m} f_n(z) \tag{3.9}$$

とおくと，z を固定したとき数列 $\{g_n(z)\}$ が収束するとき，無限級数(3.8)は点 z で収束するといいます．(3.9)の和のかわりに，$f_n(z)$ の絶対値の和

$$h_m(z) = \sum_{n=1}^{m} |f_n(z)| \tag{3.10}$$

を考えてみましょう．$h_m(z)$ は非負の実数になります．(3.10)の定義より

$$h_1(z) \leqq h_2(z) \leqq h_3(z) \leqq \cdots \leqq h_m(z) \leqq h_{m+1}(z) \leqq \cdots$$

となります．したがって $\{h_n(z)\}$ が有界であれば定理 3.1 より数列 $\{h_n(z)\}$ は収束します．$\{h_n(z)\}$ が有界であるためには

$$|f_n(z)| \leqq M_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束すれば十分であることが分かります．$\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right.$ が収束するのは定義より，$a_m = \sum_{n=1}^{m} M_n$ とおくと数列 $\{a_n\}$ が収束することを意味します．$h_m(z) \leqq a_m$ に注意します．$\Big)$

一方，(3.9), (3.10)より

$$|g_m(z)| = \left|\sum_{n=1}^{m} f_n(z)\right| \leqq \sum_{n=1}^{m} |f_n(z)| = h_m(z)$$

が成り立ちますので，系 3.1 より次の重要な結果が示されたことになります．

定理 3.3

1) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ が点 z で収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ も収束する．

2)　複素平面 $\boldsymbol{C}$ の部分集合 D の各点 z で

$$|f_n(z)| \leqq M_n, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

を満足し，かつ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束する数列 $\{M_n\}$ が存在すれば D の各点 z で $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ は収束し，したがって $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ も収束する．

この定理は大変強力な定理で，これからも何度も使うことになります．定理 3.3, 1)に出てくる条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$$

が点 z で収束することを，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は点 z で**絶対収束**するといいます．定理 3.3, 1)の主張は絶対収束すれば収束するということです．絶対収束と収束とは言葉は似ていますが，本来は定義がまったく違うので定理 3.3, 1)は当り前のことではありません．

そこで，この定理 3.3 を使って無限級数(3.1)の収束を調べてみましょう．すでに述べたように(3.1)が収束することは

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}, \qquad \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(z+l)^2} \tag{3.11}$$

が収束することと同じです．$|z| \leqq R$ で無限級数(3.11)を考えます．R 以下の最大の正整数を n_0 とすると，(3.1)の級数を考える際，有限和

$$\sum_{n=-n_0}^{n_0}\frac{1}{(z-n)^2} \tag{3.12}$$

を除外して考えます．(3.12)は $|z| \leqq R$ で極が出てくる部分で，(3.12)以外の項

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}, \qquad \sum_{l=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(z+l)^2}$$

の収束を考えます．$n > R$ のとき，$|z| \leqq R$ では

$$\frac{1}{|z-n|^2} \leqq \frac{1}{(n-|z|)^2} \leqq \frac{1}{(n-R)^2}$$

が成り立ちます．特に $n=n_0+1+m$ とおくと，$n \geqq n_0+2$ であれば，$n_0+1 > R \geqq n_0$ に注意すると

$$\frac{1}{(n-R)^2} \leqq \frac{1}{m^2}, \qquad n=n_0+1+m$$

が成り立ちます．また

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

は収束するので，$\displaystyle\sum_{n=n_0+2}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ は $|z|\leqq R$ の各点で絶対収束し，したがって $|z|\leqq R$ の各点で収束します．したがって $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ も収束します．同様に

$$\frac{1}{|z+l|}\leqq\frac{1}{l-|z|}\leqq\frac{1}{(l-R)^2}$$

が成り立つので $\displaystyle\sum_{l=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(z+l)^2}$ も $|z|\leqq R$ の各点で収束します．ところで(3.1)は

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+\sum_{l=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(z+l)^2}$$

に有限個の和(3.12)を足したものなので $|z|\leqq R$ かつ z は整数でなければ(3.1)が収束することが分かります．さらに R は任意に大きな数をとることができますので(3.1)は z が整数以外のところで収束することが分かります．ここで示した収束は，点 z で絶対収束するよりさらに強い性質，$|z|\leqq R$ であれば収束の仕方が z によらないという，を持っていますので，(3.1)は z が整数以外のところでは微分可能であることも分かります．

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

とおくと，無限和と微分とが交換でき

$$f'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{-2}{(z-n)^3}$$

であることも分かります．

ところで

$$\begin{aligned}f(z+1)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+1-n)^2}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\{z-(n-1)\}^2}\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-l)^2}\\&=f(z)\end{aligned}$$

$$\frac{2|z|}{|z^2-n^2|} < \frac{2|z|}{n^2-|z|^2} < \frac{2R}{n^2-R^2}$$
$$< \frac{2R}{(n-R)^2}$$

であることから，上と同様にして示すことができます．じつは

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$

であることを第5章§1で示します．

質問コーナー

質問1　定理3.1は実数の持つ大切な性質であると言われましたが，数直線を考えたらあたり前のように思われますが．

質問に答えて

確かにその通りなのですが，では数直線のすべての点に実数がきちんと1通りに対応していることはどうして分かるのでしょうか．このことは自明のことではなく，実数の持つ性質を数直線上にうまく表現できるといった方が正確だと思います．

ユークリッドの『原論』では実数は線分を使って表現され比の理論が構成されています．デデキントはユークリッドの議論を書き換えて現代的な実数論を作りました．現代の実数論は素朴な幾何学的な直観に頼らずに，有理数の列の極限として実数をとらえます．その際，定理3.1が実数の持つ大切な性質として浮び上がってくるのです．それは幾何学的にいえば数直線のどこにも穴が空いておらずつながっていることを意味し，質問のようにあたり前のように思われます．これは実数の持つ基本的性質，実数の完備性を幾何学的に表現したものに他ならず，実数論の立場からいえば，実数の完備性によって数直線にそのような性質を持たせたことになり，立場が逆転してしまいます．これでは堂々巡りのように思われるかもしれませんが，極限や収束の議論をするためには，幾何学的直観にたよるだけでは不十分であり，実数論に基づく議論が必要になってきます．

数は $z=k$ の近くでは $\dfrac{1}{(z-k)^2}+$ 正則函数 の形となり $z=k$ で 2 位の極を持ちます．このように $z=k$ では無限級数の $\dfrac{1}{(z-k)^2}$ の項が意味を持ちませんので，収束や発散は $\dfrac{1}{(z-k)^2}$ の項を除いた無限級数の収束・発散を問題にします．

§4 無限積

無限積について，簡単にふれておきます．無限積に関しては第 5 章 § 3 で対数函数を定義した後に第 5 章 § 4 で詳しく考えることにします．ここでは例として

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2n-1})=(1+z)(1+z^3)(1+z^5)\cdots \tag{4.1}$$

を考えてみましょう．Π は積の記号で Product の頭文字 P に対応するギリシア文字 Π（パイ）からきています．$\prod_{n=1}^{m}(1+z^{2n-1})$ は

$$(1+z)(1+z^3)(1+z^5)\cdots(1+z^{2m-1})$$

を意味します．無限積(4.1)は

$$P_m(z)=\prod_{n=1}^{m}(1+z^{2n-1})$$

とおき，$\{P_m(z)\}$ が収束するとき，収束するといいます．（これは少し不正確な定義で，第 5 章 § 4 で正確な定義を述べたいと思います．）(4.1)は $|z|<1$ で収束することを第 5 章 § 4 で示します．一方，無限級数

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{m^2}}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)\cdots(1-z^{2m})}$$

も $|z|<1$ で収束することが示せます．

定理 4.1 (Euler)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1})=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{m^2}}{(1-z^2)(1-z^4)\cdots(1-z^{2m})}$$

証明は形式的に行うことができます．パラメータ a を導入して

$$K(a,x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+ax^{2n-1})$$

演習問題

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ は $a=1$ のとき発散し，$a=2,3,4,\cdots$ のとき収束することを定理 3.1 を用いて示せ．(積分を使うと

$$\frac{1}{n^a}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^a}\,dx$$

が成り立つ．また $a=1$ のときは

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}\times n=\frac{1}{2}$$

に注意.)

2. $$A_m(z)=\sum_{n=-m}^{m}\frac{(-1)^n}{z-n}$$

とおくと $\{A_m(z)\}$ は z が整数以外のところで収束することを示せ．じつは

$$\lim_{m\to\infty}A_m(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

が成り立つ．

3. $|z|<1$ で

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots=\frac{1}{1-z}$$

が成り立つことを示せ．

質問コーナー

質問 1　無限積では $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\cdots$ の形の積しか考えないのですか．

質問 2　(4.1)は $|z|<1$ で収束するといわれましたが，$z_0^{2m-1}=-1$ となる z_0 でも積は 0 に収束するのではないのでしょうか．

質問に答えて

2 つの質問の答えは第 5 章§4 で与えますが，要約すると次のようになります．

能であること，また D の各点でテイラー展開可能であることなどが示されます．こうした性質はコーシーの積分定理とよばれる大定理からの簡単な帰結です．これからしばらくは，コーシーの積分定理を目標に話しを進めて行きたいと考えています．

すでに第3章§1に示したように多項式 $f(z)$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ の各点で微分可能であり，したがって $\boldsymbol{C}$ 上の正則函数です．一方 $\bar{z}$ や，$\bar{z}$ の多項式は $\boldsymbol{C}$ の各点で微分不可能であり，正則函数ではありません．このことは大切なことですので，第3章§1をぜひ復習しておいてください．

第3章§1で，多項式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

の導函数 $f'(z)$ は

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

であることを示しました．このことは，ベキ級数の場合に一般化することができます．

定理 1.1　ベキ級数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.2}$$

の収束半径は $r > 0$ であるとする．このときベキ級数

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{1.3}$$

の収束半径も r であり，ベキ級数(1.3)の定める $D(0, r)$ 上の函数は，ベキ級数(1.2)の定める $D(0, r)$ の函数 $f(z)$ の導函数 $f'(z)$ である．言い換えると，ベキ級数(1.2)の定める $D(0, r)$ 上の函数 $f(z)$ は，$D(0, r)$ 上正則であり，その導函数はベキ級数(1.3)で与えられる．

ベキ級数(1.3)の収束半径も r なので，このベキ級数に定理1.1を適用すると，$f(z)$ は $D = D(\theta, r)$ の各点で2階微分可能であり，

$$\begin{aligned} f''(z) &= 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \end{aligned}$$

ほど不思議な定理でないことはお分かり頂けたと思います．

さて，定理 1.1 はさまざまな形で応用できますが，ここでは，以前に詳しく調べた等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

を再び考えてみましょう．この等式は，左辺のベキ級数の収束半径が 1 ですので，$|z|<1$ で成り立つ等式です．この両辺を微分すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1+2z+3z^2+4z^3+\cdots+nz^{n-1}+\cdots = \frac{1}{(1-z)^2}$$

を得ます$\left(\dfrac{1}{1-z}\right.$ の微分については第 3 章 §1，補題 1.3 を見てください$\left.\right)$．

この等式をもう一度微分すると

$$2+6z+12z^2+20z^3+\cdots+n(n-1)z^{n-2}+\cdots = \frac{2}{(1-z)^3}$$

書き換えると

$$1+3z+6z^2+10z^3+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}+\cdots = \frac{1}{(1-z)^3}$$

が成り立ちます．この等式も $|z|<1$ で成り立ちます．この等式をさらに微分して，両辺を 3 で割ることによって，$|z|<1$ で成り立つ等式

$$1+4z+10z^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}z^{n-3}+\cdots = \frac{1}{(1-z)^4}$$

を得ます．この操作をさらに続けて，たくさんの等式を作ることができますが，それは演習問題とします．$\dfrac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m}$ ですので，これらの等式は二項展開

$$(1-z)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} z^{m-k}$$

の一般化と考えることができます．

ところで，上の定理 1.1 では原点を中心とするベキ級数を考えましたが，点 z_0 を中心とするベキ級数でも同様の定理が成り立つことは明らかと思います．念のため定理として書いておきましょう．

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1{}^k z_2{}^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n$$

$$= e^{z_1+z_2}$$

となり補題が正しいことが分かる．じつは(1.6)の等号は，無限の和の取り方をかえているので証明する必要がある．これも級数が絶対収束することから導かれる．

この補題を使うと，e^z という記法が意味を持つことが次のようにして分かります．まず(1.5)で $z=1$ とおいて

$$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

と記します．

$$e = 2.7182818\cdots$$

であることが分かっています．じつは e は無理数であることも分かります．補題 1.2 より

$$e^2 = e \cdot e, \qquad e^3 = e^2 \cdot e = e \cdot e \cdot e$$

が示され，数学的帰納法によって

$$e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot e \cdots\cdot e}_{n} \tag{1.7}$$

であることが分かります．(e^n は e^z に $z=n$ を代入したものですが，それが e の n 乗に等しいというのが上の等式(1.7)です.)　同様にして，$z=\dfrac{1}{n}$ のときを考えると

$$\underbrace{e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot e^{\frac{1}{n}}}_{n} = e^{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = e$$

であることが分かり，$e^{\frac{1}{n}}$ は e の n 乗根であることも分かります．さらに $z=\dfrac{m}{n}$，n, m は正整数 のときを考え，補題 1.2 を適用すると

$$e^{\frac{m}{n}} = \underbrace{e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdots\cdot e^{\frac{1}{n}}}_{m}$$

補題 1.3　$\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

証明　補題 1.2 を使って次のよう計算すればよい.

$$\begin{aligned}\sin^2 z+\cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{-4}+\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

補題 1.4 (加法公式)

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

証明　再び補題 1.2 を使う.

$$\begin{aligned}&\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2 \\ &= \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}}{4i} \\ &\quad+\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \\ &= \sin(z_1+z_2)\end{aligned}$$

$\cos(z_1+z_2)$ に関しても同様に証明できる.

さて(1.8)から

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \tag{1.11}$$

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z \tag{1.12}$$

が成り立つことがわかります. 逆に(1.11), (1.12)から(1.8)が導けます. これらの式を使って補題 1.4 を示すこともできます. すなわち, (1.11)と補題 1.2 より

$$\begin{aligned}e^{i(z_1+z_2)} &= \cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)=e^{iz_1}\cdot e^{iz_2} \\ &= (\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)\end{aligned}$$

演習問題

1. $$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n+1)}{(m-1!)} z^n$$

を示せ．ただし $m \geqq 2$ とする．

2. $$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

を示せ．

3. $\sin i, \cos i$ の値を求めよ．

4. 正整数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

を示せ．

5. ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が

$$f'(z) = f(z), \qquad f(0) = 1$$

を満足すれば

$$f(z) = e^z$$

であることを示せ．

6. ベキ級数 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が

$$g''(z) = -g(z), \qquad g(0) = 0, \qquad g'(0) = 1$$

を満足すれば

$$g(z) = \sin z$$

であることを示せ．

7. 指数函数 e^z は複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上でけっして 0 にならないことを示せ．また

$$e^{z+\omega} = e^z$$

がすべての複素数 z に対して成り立てば，ω は $2\pi i$ の整数倍であることを示せ．(ヒント．$z = x+iy$ と実部と虚部に分けると

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

と書ける．)

と，実部と虚部に分けて考え，$x(t), y(t)$ が t の函数として連続のとき，γ を**連続曲線**，$x(t), y(t)$ が t の函数として何回でも微分可能なとき，γ を**滑らかな曲線**とよびます．以下しばらくは滑らかな曲線について考えてみましょう．これから，ひんぱんに登場する滑らかな曲線としては，点 a を中心とする半径 r の円

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \boldsymbol{C} \\ t \quad &\longmapsto a + r(\cos t + i \sin t) = a + re^{it} \end{aligned}$$

をあげることができます．

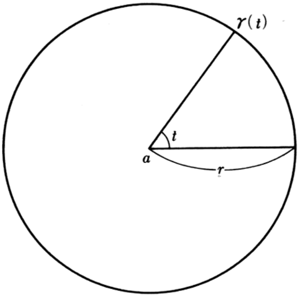


図 2.1

さて，滑らかな道(曲線) $\gamma : [a, b] \to \boldsymbol{C}$ が与えられたとき，この道とその近くで定義された函数 $f(z)$ に対して，$f(z)$ の道 γ に沿った積分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ を

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \tag{2.1}$$

と定義します．ただし，

$$\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$$

のとき $\gamma'(t)$ は

$$\gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$$

を意味します．また複素数に値をとる区間 $[a, b]$ 上の函数 $F(t)$ (たとえば (2.1) に出てくる $f(\gamma(t))\gamma'(t)$) の積分 $\int_a^b F(t)\,dt$ は，$F(t)$ を

と書かれます．(2.4)の記号で $|z-a|=r$ と書かれた部分は(2.2)の曲線を考えていること，言いかえると，t が大きくなるとき $\gamma(t)$ は円周上を反時計廻りにまわることに注意しておきます．

次に，もっと一般に γ に沿っての $\dfrac{1}{(z-a)^n}$ の積分

$$\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}$$

を考えてみましょう．n は整数とします．このときは

$$\begin{aligned}\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} r^{1-n}e^{-nit}\cdot ie^{it}dt\\ &= i\int_0^{2\pi} r^{1-n}e^{-(n-1)it}dt\\ &= \begin{cases}0 & n\neq 1\\ 2\pi i & n=1\end{cases}\end{aligned}\tag{2.5}$$

と計算できます．

$$e^{mit}=\cos mt+i\sin mt$$

ですので，$m\neq 0$ のとき

$$\int_0^{2\pi} e^{mit}dt=0$$

に注意します．

少し先走りしすぎてしまいましたが，γ に沿っての積分(2.1)

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

の意味を考えてみましょう．曲線 $\gamma:[a,b]\to \boldsymbol{C}$ が定義されている区間 $[a, b]$ を小区間 $[t_j, t_{j+1}]$ に分割します(図 2.2)．

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=b$$

そして和

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(\gamma(t_j))(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j))\tag{2.6}$$

を考えます．平均値の定理*) を $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ の実部と虚部とに適用

*) 『円周率 π をめぐって』第 3 章 § 3 演習問題 2 を参照して下さい．

が与えられ，t が a から b へ動くと $\gamma(t)$ は $\gamma(a)$ から $\gamma(b)$ へ動き，曲線に向きが定まります(図 2.3)．この曲線 γ に対して，$\gamma(b)$ から $\gamma(a)$ へ動く逆向きの曲線 γ^{-1} を考えることができます．γ^{-1} は

$$
\begin{aligned}
\gamma^{-1}: [a, b] &\longrightarrow \boldsymbol{C} \\
t &\longmapsto \gamma(a+b-t)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

で定義されます．

$$\gamma^{-1}(a) = \gamma(b), \qquad \gamma^{-1}(b) = \gamma(a)$$

であることからも γ^{-1} は γ の逆向きの道であることが分かると思います(図 2.4)．このとき

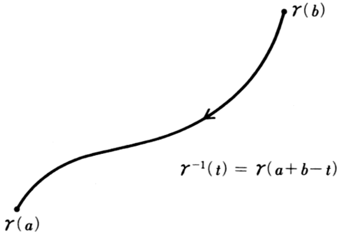


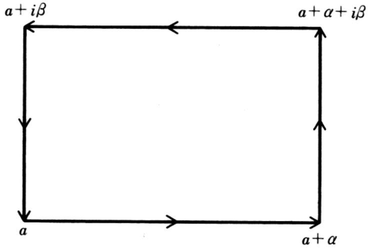
図 2.4

$$\gamma^{-1\prime}(t) = -\gamma'(a+b-t)$$

ですので，$s = a+b-t$ と変数変換することによって

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz &= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\gamma'(a+b-t)\,dt \\
&= \int_b^a f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds \\
&= -\int_\gamma f(z)\,dz
\end{aligned}
$$

であることが分かります．これは大切な事実ですので補題として書いておきましょう．



α，β は実数，a は複素数

図 2.5

$$\int_0^1 (a+t\alpha)\,\alpha\,dt = \int_0^1 (a\alpha+t\alpha^2)\,dt$$
$$= \left[a\alpha t+\frac{1}{2}\alpha^2 t^2\right]_0^1$$
$$= a\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\int_1^2 \{a+\alpha+i(t-1)\beta\}i\beta\ dt = \int_0^1 (a+\alpha+is\beta)\,i\beta\ ds$$
$$= \int_0^1 \{(a+\alpha)\beta i-s\beta^2\}ds$$
$$= \left[(a+\alpha)\beta is-\frac{1}{2}\beta^2 s^2\right]_0^1$$
$$= (a+\alpha)\beta i-\frac{1}{2}\beta^2$$
$$= a\beta i+\alpha\beta i-\frac{1}{2}\beta^2$$

$$\int_2^3 \{a+\alpha+i\beta-(t-2)\alpha\}(-\alpha)\,dt = -\int_0^1 (a+\alpha+i\beta-s\alpha)\,\alpha\,ds$$
$$= -\left[(a+\alpha+i\beta)\alpha s-\frac{1}{2}\alpha^2 s^2\right]_0^1$$
$$= -(a+\alpha+i\beta)\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2$$
$$= -a\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha\beta i$$

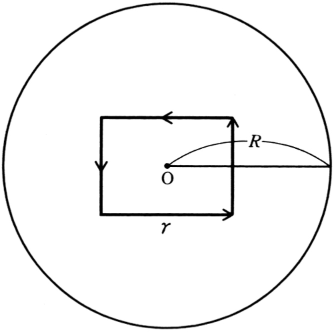


図 2.6

は虚軸と平行と仮定しておきます)，$f(z)$ の γ に沿っての積分は

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma z^n dz \\
&= 0 \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

と計算できそうに思えます．このことは，正しいことですが，すでに何度も出てきたように上の式の変形で積分と無限和を入れ替える所には注意を要します．今の場合は，ベキ級数が絶対収束することから，積分と無限和の入れ替えが正しいことが分かります．

(2.11)は一般の正則函数に対しても正しいのでしょうか．じつは，そうであることが証明できます．

定理 2.4 (長方形に対するコーシーの積分定理)

(2.9)で定義される長方形 γ の内部，および長方形を含む開集合*) D 上で定義された正則函数 $f(z)$ に対して

*) D の各点 z_0 に対して z_0 を中心とする半径 ε の円板 $\{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$ が D に含まれるように ε を選ぶことができるとき(ε は z_0 によって変化してよい)，D を**開集合**とよびます．直観的には D の境界が D に含まれないとき開集合になります．

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

であることが分かります．したがって各 γ_j に対して

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0 \tag{2.12}$$

がいえれば定理が証明されたことになります．(2.12)をいうためには，各 γ_j を四等分してその各々の長方形 γ_{jk} に対して

$$\int_{\gamma_{jk}} f(z)\,dz = 0$$

がいえればよいことが分かります．このようにして，長方形をどんどん小さくして考えてもよいことが分かります．このことを厳密に実行するには ε-δ 論法が必要になりますので，次節にそのことにも触れることにします．

最後に，応用上重要な次の定理を証明しておきましょう．

定理 2.5　開集合 D 上の正則関数 $F(z)$ の導函数 $F'(z)$ を $f(z)$ と記す．区分的に滑らかな曲線 $\gamma:[a,b]\to \boldsymbol{C}$ の像が D に含まれるとき

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

が成り立つ．したがって，特に γ が閉曲線である，すなわち $\gamma(a)=\gamma(b)$ であれば

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．

証明
$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\,dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

であることが合成函数の微分と定積分の性質より示される．

前回述べたように，指数函数 $F(z)=e^z$ に対して $F'(z)=e^z$ ですので，任意の閉曲線 γ に対して

で定める．このとき γ と $\tilde{\gamma}$ の像は一致し，かつ

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

であることを示せ．（ヒント：変数変換 $t = a + (b-a)s$ によって

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 f(\gamma(a+(b-a)s))\,\gamma'(a+(b-a)s)\,(b-a)\,ds$$

であること，および

$$\tilde{\gamma}'(s) = (b-a)\,\gamma'(a+(b-a)s)$$

であることに注意する．）

4. 2本の曲線

$$\gamma_1 : [0,1] \to \boldsymbol{C}, \qquad \gamma_2 : [0,1] \to \boldsymbol{C}$$

が $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ を満足しているとする．このとき γ_1 に γ_2 をつないだ曲線 $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{C}$ を

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と定義する．γ の像は γ_1 の像と γ_2 の像とをつないだものであることを示せ．
またこのとき

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

を示せ．

質問コーナー

質問　関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は $y = f(x)$ のグラフの面積と考えることができますが，線積分も何かのグラフの面積と考えることはできるのでしょうか．

質問に答えて

滑らかな道 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{C}$ に沿った積分 $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ は $\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

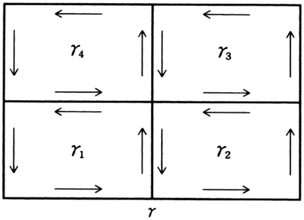


図 3.2

は符号が逆になっています．したがって，$I(\gamma_1)+I(\gamma_2)$ は図 3.2 の二つの小長方形 γ_1 と γ_2 とを合わせた長方形の周に沿っての積分に等しいことが分かります．このようにして

$$I(\gamma)=I(\gamma_1)+I(\gamma_2)+I(\gamma_3)+I(\gamma_4)$$

であることが分かります．

$|I(\gamma_1)|, \cdots, |I(\gamma_4)|$ のうち最大のものを $|I(\gamma_{j_1})|$ と記すと，上の等式より

$$|I(\gamma)| \leqq 4|I(\gamma_{j_1})|$$

すなわち

$$|I(\gamma_{j_1})| \geqq \frac{1}{4}|I(\gamma)| \tag{3.1}$$

が成り立ちます．

次に長方形 γ_{j_1} を上と同様に四等分し，小長方形 $\gamma_{j_1,1}$, $\gamma_{j_1,2}$, $\gamma_{j_1,3}$, $\gamma_{j_1,4}$ を図 3.3 のように作ります．このとき，上と同様に

$$I(\gamma_{j_1})=I(\gamma_{j_1,1})+I(\gamma_{j_1,2})+I(\gamma_{j_1,3})+I(\gamma_{j_1,4})$$

が成り立ちます．$|I(\gamma_{j_1,k})|$ の中で $|I(\gamma_{j_1,j_2})|$ が最大であるとすると

$$|I(\gamma_{j_1,j_2})| \geqq \frac{1}{4}|I(\gamma_{j_1})|$$

が成り立ちます．この不等式と (3.1) より

$$|I(\gamma_{j_1,j_2})| \geqq \frac{1}{4^2}|I(\gamma)|$$

が成り立つことが分かります．次に長方形 γ_{j_1,j_2} を四等分することによって

$$|I(\gamma_{j_1,j_2,j_3})| \geqq \frac{1}{4^3}|I(\gamma)|$$

分かっているつもりでも，それを正確に表わしてごらんなさいと言われると，どうしてよいか分からない人が多いでしょう．(3.3)の極限のことを考える前に，まず，数列$\{z_n\}$に関して

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \tag{3.4}$$

の意味を考えてみましょう．(3.4)の意味は点z_nと点z_0の間の距離$|z_n - z_0|$が，nが大きくなるとき，どんどん小さくなって行くことを意味します．この小さくなって行くことを表現するにはどうしたらよいでしょうか．簡単に思いつくことは，小さな正の数εを与えたとき$|z_n - z_0| < \varepsilon$をみたす$z_n$がどれくらいあるかを考えることです．$z_n$が$z_0$に近づくためには，$\varepsilon$をどんなに小さくとっても，ある番号$n_0$から先の$z_n (n \geqq n_0)$はすべて$z_0$から半径$\varepsilon$の円板内に入らなければならない(図3.4)．もちろん，n_0はεのとり方によって変わってくるでしょう．大切なことは，(3.4)が成り立てば，n_0を十分大きくとれば，$n \geqq n_0$のとき，$|z_n - z_0|$は与えられたεより小さくなるという事実です．じつは，このことが(3.4)の正確な意味を与えます．正確な定義を書いてみましょう．

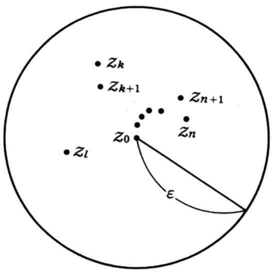


図 3.4

定義 3.1　複素数列$\{z_n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$は以下の条件を満足するとき，点z_0に収束するといい

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon \tag{3.5}$$

が成り立つように，正の数 δ を選ぶことができる．

今度は，前の定義より少し分かりにくいかもしれません．(条件)が主張している重要なことは，どんな $\varepsilon>0$ を選んでも，z_0 の近くの点 $z\neq z_0$ はすべて(3.5)を満足するということです．その際 z_0 の近くのすべての点 z を表現するのが $0<|z-z_0|<\delta$ という不等式です．点 z が z_0 に近づくと，$0<|z-z_0|<\delta$ という不等式を満足するようになり，したがって(条件)が成り立っていれば(3.5)の不等式が成り立ちます．もちろん δ は ε によって違ってきます．ε はどんどん小さく選んでいくことができますので，z が z_0 に近づくほど $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ と $f'(z_0)$ との距離が小さくなり，結局

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

でなければならないということが，(条件)から自然に出て来ます．ここでも，**任意**の $\varepsilon>0$ に対して(条件)が成り立つことが大切です．

以上の定義は，分かってしまうと何でもないことなのですが，最初はとりつきにくい所があります．上の説明を何度か読み返して，自分で納得できるまで考えてみてください．

さて，$f(z)$ が点 z_0 で微分可能であることの表現，いわゆる ε-δ 法を分かっていただけたとして，先へ進みましょう．コーシーの積分定理の証明のためには，定義 3.2 を別の形に書き換えておくと便利です．そのために，$z\neq z_0$ のとき

$$\eta(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)$$

とおきます．この定義式の両辺に $z-z_0$ を掛けることによって

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\eta(z)(z-z_0) \tag{3.6}$$

と書くことができます．$\eta(z)$ は $z\neq z_0$ のときしか定義しませんでしたが，

$$\eta(z_0)=0$$

と定義しましょう．このとき，次の補題が成り立ちます．

れて点 z_0 に収束しますので，n を十分大きくとれば，長方形 $\gamma_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ はその内部と周囲とが z_0 を中心とする半径 δ の開円板

$$\{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-z_0| < \delta\}$$

に含まれます．このような n を一つ固定して，記号を簡単にするために $R^{(n)} = \gamma_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ とおきましょう．したがって $R^{(n)}$ 上では

$$|\eta(z)| < \varepsilon$$

であることが分かります．$f(z)$ の $R^{(n)}$ に沿っての積分を(3.8)を使って計算します．

$$\int_{R^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{R^{(n)}} f(z_0)\,dz + \int_{R^{(n)}} f'(z_0)(z-z_0)\,dz$$
$$+ \int_{R^{(n)}} \eta(z)(z-z_0)\,dz. \qquad (3.9)$$

前回の例 2.3 の計算により

$$\int_{R^{(n)}} z\,dz = 0$$

であることが分かり，同様の計算によって定数 k に対しては

$$\int_{R^{(n)}} k\,dz = 0$$

であることが分かります．したがって(3.9)の右辺の第 1 項と第 2 項は 0 であることが分かり

$$\int_{R^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{R^{(n)}} \eta(z)(z-z_0)\,dz \qquad (3.10)$$

が成り立ちます．$R^{(n)}$ 上では

$$|\eta(z)| < \varepsilon, \qquad |z-z_0| < \delta$$

が成り立ちます．函数 $g(z)$ の $R^{(n)}$ に沿っての積分 $\int_{R^{(n)}} g(z)\,dz$ の定義を再度復習しておきまょう．$R^{(n)}$ が

$$\gamma^{(n)} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

と表示されれば，区間 $[0,1]$ を

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$$

と分割して(その際，長方形 $R^{(n)}$ の頂点は $\gamma^{(n)}(t_l)$ と書けるように分割する)和

$$\left|\sum_{j=0}^{N} g(\gamma^{(n)}(t_j))(\gamma^{(n)}(t_{j+1})-\gamma^{(n)}(t_j))\right| < \frac{\varepsilon dL}{4^n}$$

が出ます．左辺の極限をとることによって

$$\left|\int_{R^{(n)}} g(z)\,dz\right| \leqq \frac{\varepsilon dL}{4^n}$$

であることが分かります．したがって，(3.10)より

$$\left|\int_{R^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{\varepsilon dL}{4^n}$$

であることが分かり，

$$\begin{aligned} I(\gamma_{j_1,j_2,\cdots,j_n}) &= \int_{\gamma_{j_1,j_2,\cdots,j_n}} f(z)\,dz \\ &= \int_{R^{(n)}} f(z)\,dz \end{aligned}$$

に注意すると，(3.2)より

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| &\leqq 4^n\left|\int_{R^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leqq 4^n\cdot\frac{\varepsilon dL}{4^n} \\ &= \varepsilon dL \end{aligned} \tag{3.11}$$

が成り立つことが分かります．ここで L は長方形 γ の周の長さであり，ある定数ですが，正の数 ε は任意に与えることができました．したがって，ε はどれだけでも小さな正の数をとることができ，(3.11)の不等式が任意の ε に対して成り立つことは

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

が成り立たない限り不可能です．このようにして，コーシーの積分定理が証明されました．

以上の証明では，一点 z_0 で $f(z)$ が微分可能であることしか使っていません．$f(z)$ が長方形 γ を含む開集合で正則であるという条件は必要なかったのだろうかと不審に思われる方もありそうですが，この条件をはずすことはできません．証明に出て来た点 z_0 は長方形 γ の内部または周上の点ですが，長方形 $\gamma_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ を作っていくときその収束先 z_0 がどこになるかは最初からは分からないからです．したがって証明が意味を持つためには，$f(z)$ は長方形の内部および周上の点で微分可能であることが必要になります．

す．勝手に $\varepsilon>0$ をとるとそれに応じて δ が決まるということであり，「任意の」という言葉のかわりに「すべての」と言い換えてもよいのです．ε-δ 法の文脈では任意に $\varepsilon>0$ をとることはすべての $\varepsilon>0$ をとることと同じ意味を持っています．こうした微妙な言葉の使い方の違いが ε-δ 法を難しくしていることは否めません．少々残念なことですが．

§4　正則函数の基本的性質

前節でコーシーの積分定理を特別の場合に証明しました．ε-δ 法を使って，少々分かりにくかったかもしれません．この節では，このコーシーの積分定理から，正則函数の重要な性質をたくさん導くことができることを示したいと思います．

まず，次の事実を証明しましょう．

補題 4.1　複素平面 $\boldsymbol{C}$ の開集合 D 上の正則函数 $f(z)$ に対して，

$$F'(z)=f(z)$$

を満たす正則函数 $F(z)$ が D 上で存在すれば，D 内の区分的に滑らかな任意の閉じた道 γ に対して

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

が成り立つ．

証明　道 γ が

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow D$$

で与えられているとすると，$\gamma(a)=\gamma(b)$ である．区間 $[a,b]$ を分割して $a_0=a<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$，$[a_j,a_{j+1}]$，$j=0,1,\cdots,n-1$ で，γ は滑らかであるとすると

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz&=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}\frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt\end{aligned}$$

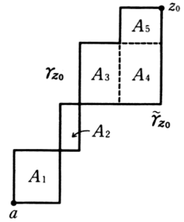


図 4.2

$$\int_{\tilde{\gamma}_{z_0}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,dz$$

が成り立ちます．このようにして，D 上の函数 $F(z)$ が定まります．このとき，$F(z)$ は D で正則であり，

$$F'(z) = f(z)$$

であることを示しましょう．そのために使うことは，$f(z)$ は D の各点で連続であるという事実だけです．D の点 z_0 の近くだけを考えます．z が z_0 の近くにあるとき，a と z とを結ぶ折れ線 γ_z は，a と z_0 とを結ぶ折れ線 γ_{z_0} と z_0 から虚軸に平行，次に実軸に平行な折れ線 l_z とを結んでできるものとしてよいことに注意します(図 4.3)．このとき

$$\begin{aligned} F(z)-F(z_0) &= \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_{l_z} f(\zeta)\,d\zeta \end{aligned}$$

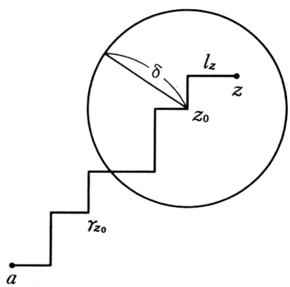


図 4.3

定理 4.2 開円板

$$D = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-a| < R\}$$

で正則な函数 $f(z)$ と D 内の区分的に滑らかな閉曲線 γ に対して

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．

この定理は，もう少し一般化することができます．

定理 4.3 $f(z)$ は開円板

$$D = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-a| < R\}$$

から有限個の点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ を除いた

$$D' = D - \{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}$$

で正則であり，

$$\lim_{z \to \zeta_j} (z-\zeta_j) f(z) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立てば，D' 内の区分的に滑らかな閉曲線 γ に対して

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．

上の議論をよく反省してみると，この定理の証明のためには，前節で証明したコーシーの積分定理を次の形に拡張しておけばよいことが分かります．

定理 4.4 各辺が実軸と虚軸に平行な長方形 γ と，γ の内部の点 ζ に対して，ζ 以外の γ の内部と γ の近くで正則な函数 $f(z)$ が

$$\lim_{z \to \zeta} (z-\zeta) f(z) = 0$$

を満足すれば

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．

定理 4.3 から次の定理が得られます．

定理 4.5（コーシーの積分公式） 開円板

$$D = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z-a| < R\}$$

で正則な函数 $f(z)$ と

$$|\zeta - a| < r < R$$

を満足する D の点 ζ に対して

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \tag{4.2}$$

が成り立つ．

証明 $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-\zeta} - \dfrac{f(\zeta)}{z-\zeta}$ とおくと

$$\lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)g(z) = 0$$

であるので，定理 4.3 より

$$\int_{|z-a|=r} g(z)\,dz = 0$$

である．したがって

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = \int_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,dz$$

を得る．定理を証明するためには

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-\zeta} = 2\pi i$$

を示せばよい．そこのためには a を中心とする半径 r の円板内に ζ を中心とする半径 ε の小円を描き，図 4.5 のように 3 つの閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を作る．$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は点 ζ を含まない開円板に含まれるので

$$\int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-\zeta} = 0$$

である．したがって

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-\zeta} - \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{dz}{z-\zeta} = \sum_{j=1}^{3}\int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-\zeta} = 0$$

となり，

とおくと(0! ＝1 と約束します)，

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(\zeta - a)^n \tag{4.4}$$

とテイラー展開できることが分かります．このようにして，正則函数は開集合 D の各点でテイラー展開でき，その係数は(4.3)で与えられることが分かりました．ベキ級数(4.4)は $|\zeta - a| < |z - a| = r$ である限りは収束します．したがって，ベキ級数の微分に関する結果より，正則函数は何回でも微分可能であることも分かります．(4.3)，(4.4)より

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \tag{4.5}$$

であることも分かります．じつは(4.2)の両辺を ζ に関して微分することによって((4.2)の右辺で微分と積分が交換できることが示せます)，

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\,dz \tag{4.6}$$

を示すことができます．このように，正則函数の微分は，積分を使って表示できることが分かります．

さて，$f(z)$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ で正則，かつ $\boldsymbol{C}$ 上で $|f(z)|$ は有界，すなわち

$$|f(z)| \leqq M \tag{4.7}$$

が $\boldsymbol{C}$ のすべての点 z で成り立つと仮定しましょう．すると，$\boldsymbol{C}$ の任意の点 a で，(4.5)より

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

が，任意の $r > 0$ に対して成り立ちます．$|z-a| = r$ 上の点は

$$z = a + re^{i\theta}$$

と表わされますので

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})\,rie^{i\theta}}{r^2 e^{2i\theta}}\,d\theta$$

となり，不等式(4.7)より

$$|f'(a)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(a+re^{i\theta})|}{r}\,d\theta$$

$$\leqq \frac{M}{r}$$

$$\leqq \frac{1}{R^n\left(1-\frac{|a_1|}{R}-\frac{|a_2|}{R^2}-\cdots-\frac{|a_n|}{R^n}\right)}$$

が成り立ちます．ここで，R は

$$1-\frac{|a_1|}{R}-\frac{|a_2|}{R^2}-\cdots-\frac{|a_n|}{R^n} > \frac{1}{2}$$

であるように，十分大きくとっておきます．すると $|z|>R$ では

$$|f(z)| < \frac{1}{2R^n}$$

となり，$|f(z)|$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ 全体で有界となります．すると定理 4.6 により $f(z)$ は定数でなければなりません．ところが $f(x)=1/P(x)$ であり，$P(x)$ は定数でない多項式ですから矛盾が導かれたことになります．これは，$P(x)$ が複素数内に根を持たないと仮定したことが間違っていたことを意味し，$P(\alpha)=0$ となる複素数 α が存在することが証明されました．

演習問題

1. $D^*=\{z\in \boldsymbol{C} \mid 0<|z-a|<R\}$ で定義された正則函数 $f(z)$ に対して $(z-a)^m f(z)$ が z でも正則であるように正整数 m を選ぶことができるとき，$f(z)$ は点 a で極を持つという．特に $(z-a)^m f(z)$ は点 a で正則であるが，$(z-a)^{m-1}f(z)$ は点 a で正則でないとき，点 a は $f(z)$ の m **位の極**であるという．$f(z)$ が点 a で m 位の極を持つとき，$f(z)$ は D^* で

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots$$

と展開できることを示せ．これをローラン展開という．また a_{-j} を積分を使って表示せよ．

（ヒント．$(z-a)^m f(z)$ のテイラー展開を考えよ．）

2. $f(z)$ は 1 と同様に D^* で正則，点 a で m 位の極を持つとする．このとき，$0<r<R$ に対して

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

が成り立つことを示せ．ここで a_{-1} は $f(z)$ の点 a を中心とするローラン展

ですので，$\sin \pi z = 0$ であるための必要十分条件は

$$e^{\pi iz} = e^{-\pi iz}$$

となり，この条件は，両辺に $e^{\pi iz}$ をかけることによって

$$e^{2\pi iz} = 1 \tag{1.1}$$

と同値になります．

$$z = x + iy$$

と，z を実部と虚部に分けると，条件(1.1)は

$$e^{-2\pi y} \cdot e^{2\pi ix} = 1 \tag{1.2}$$

と書けます．さらにオイラーの関係式(第4章§1,(1.12))

$$e^{2\pi ix} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$$

を使うと，条件(1.2)は

$$\left.\begin{aligned} e^{-2\pi y} \cos 2\pi x &= 1 \\ \sin 2\pi x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

という条件と同値であることが分かります．(1.3)より，

$$x = n, \quad y = 0, \quad n \text{ は整数}$$

であることが分かります．すなわち，$\sin \pi z = 0$ であるところは，z が整数のところだけであることが分かります．

そこで，整数 n に対して $z = n$ を中心とする $\sin \pi z$ のテイラー展開を求めてみましょう．そのために

$$u = z - n$$

とおきましょう．

$$\begin{aligned} \sin \pi z &= \sin \pi (u + n) \\ &= \frac{e^{\pi i(u+n)} - e^{-\pi i(u+n)}}{2i} \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\pi iu} - e^{-\pi iu})}{2i} \end{aligned}$$

が成り立ちます．ここで，整数 n に対して

$$e^{n\pi i} = (-1)^n$$

が成り立つことを使いました．したがって

$$\sin \pi z = \frac{(-1)^n}{2i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi iu)^k}{k!} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\pi iu)^l}{l!} \right\}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{(z-n)^2}$$

は $z = n$ で正則であることを意味します．

そこで，無限級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

を考えてみましょう．この無限級数はすでに第3章§3で登場しました．そこで示したように，この無限級数は z が整数であるところ以外で収束し，正則な函数 $f(z)$ を定めます．また $f(z)$ は周期が1の函数，

$$f(z+1) = f(z)$$

であることも示しました．一方 $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ も $\sin \pi z$ と同様周期が1の函数です．そこで

$$g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{1.10}$$

とおくと，これも周期が1の函数になります．

$$g(z+1) = g(z)$$

また

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}$$

は $z = n$ で収束し，正則であることも第3章§3の論法を使って証明できます．

$$f(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}$$

と書けますので，(1.9) より $g(z)$ は $z = n$ で正則であることが分かります．$\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$，$f(z)$ はともに z が整数でないところでは正則でした．したがって $g(z)$ は複素平面上のすべての点で正則であることが分かります．

さて，$|g(z)|$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上で有界であることを示しましょう．$g(z)$ は周期が1の函数でしたので，任意の整数 m に対して

$$g(z+m) = g(z)$$

が成立します．このことは

を考えてみましょう．再び $|y|$ は十分大きい，$|y| \geqq M$ であると仮定します．

$$|z-n|^2 = (x-n)^2+y^2$$

ですので，$n \geqq 1$ のときは

$$|z-n|^2 \geqq (n-1)^2+y^2$$

$n \leqq 0$ のときは

$$|z-n|^2 \geqq n^2+y^2$$

が成り立ちます．($0 \leqq x \leqq 1$ と仮定していることに注意.) したがって

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2+y^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+y^2} \\ &= \frac{2}{y^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+y^2} \qquad (1.13)\end{aligned}$$

が成り立ち，不等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+y^2} \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

が成り立つことから，$|y| \geqq M$ で(1.13)の最後の無限級数は有界であることが分かります．これは $0 \leqq x \leqq 1$，$|y| \geqq M$ で $|f(z)|$ が有界であることを意味します．また(1.13)から，

$$\lim_{|y|\to\infty} |f(z)| = 0 \qquad (1.14)$$

であることも分かります．

$$|g(z)| = \left|\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - f(z)\right| \leqq \frac{\pi^2}{|\sin \pi z|^2} + |f(z)|$$

ですので，以上の考察によって $z = x+iy$

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad |y| \geqq M$$

のとき $|g(z)|$ は有界であることが分かります．一方 $|g(z)|$ は $0 \leqq x \leqq 1$，$|y| \leqq M$ で連続であり，$0 \leqq x \leqq 1$，$|y| \leqq M$ は有界な閉集合ですので $|g(z)|$ はそこで有界になります．したがって，$|g(z)|$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上で有界になります．一方 $g(z)$ は $\boldsymbol{C}$ で正則でした．よってリュービルの定理(第4章§4，定理 4.6)によって $g(z)$ は定数でなければなりません．ところが

が成り立ちます．また $\cot \pi z$ は $\sin \pi z \neq 0$ である z，すなわち z が整数以外のところで正則な函数です．(1. 15), (1. 16) および定理 1. 1 を使えば

$$\frac{d}{dz}(\pi \cot \pi z - h(z)) = 0 \tag{1.17}$$

であることが分かります．しかも，$\pi \cot \pi z$ の $z = n$ での $z-n$ に関する展開を考えることによって，$\pi \cot \pi z - h(z)$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上で正則であることが分かります．したがって (1. 17) より $\pi \cot \pi z - h(z)$ は定数であることが分かります．

ところで

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{-n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \end{aligned}$$

と書くことができるので

$$h(-z) = -h(z) \tag{1.18}$$

であることが分かります．また $\sin z, \cos z$ の定義から

$$\sin(-\pi z) = -\sin \pi z$$
$$\cos(-\pi z) = \cos \pi z$$

ですので

$$\pi \cot(-\pi z) = -\pi \cot \pi z \tag{1.19}$$

となります．一方 $\pi \cot \pi z - h(z)$ は定数 c ですので

$$\pi \cot \pi z - h(z) = \pi \cot(-\pi z) - h(-z)$$

が成り立つはずです．(1. 18), (1. 19) より，これは

$$\pi \cot \pi z - h(z) = 0$$

を意味します．かくして定理 1. 1 より次の大切な結果を導くこともできました．

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots}$$

$$=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2+\cdots$$

と書けます．そこで

$$B(z)=\frac{z}{e^z-1}-1+\frac{1}{2}z \tag{2.1}$$

とおくと

$$\begin{aligned}B(-z)&=\frac{-z}{e^{-z}-1}-1-\frac{1}{2}z\\&=\frac{ze^z}{e^z-1}-1-\frac{1}{2}z\\&=\frac{z}{e^z-1}+z-1-\frac{1}{2}z\\&=B(z)\end{aligned}$$

が成り立ち，$B(z)$ は z に関して偶函数であることが分かります．したがって

$$B(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}B_{2m}\frac{z^{2m}}{(2m)!} \tag{2.2}$$

とテイラー展開できることが分かります．上の計算結果より

$$B_2=\frac{1}{6}$$

であることが分かります．少していねいに計算すると

$$B_4=\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66}$$

が分かります．B_{2m} をベルヌーイ数といいます．(本によっては B_{2m} を B_m と記す流儀もあるので注意してください．) B_{2m} は有理数であることも分かります．

そこで，定理 1.2 の $\pi\cot\pi z$ の原点での展開をベルヌーイ数を使って求めてみましょう．(2.1)，(2.2)を使うことによって

定理 2.1　すべての正整数 m に対して

$$\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)!}$$

が成り立つ.

§3　対数函数

対数函数は指数函数の逆函数として通常は定義します. 第4章§1で述べたように指数函数 e^z は $2\pi i$ の整数倍を周期とする周期函数ですので逆函数を定義するのには注意が必要です.

$$w = \log z$$

は

$$z = e^w$$

を意味しますが, n が整数であれば $e^{w+2n\pi i} = e^w$ が成り立ちますので, z に対して $\log z$ は唯一つ定めることはできません. もちろん, 複素数 $z \neq 0$ に対して

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad 0 \leqq \theta < 2\pi \tag{3.1}$$

と一意的に表示することができますので, 実数の場合の対数を使って

$$\log z = \log|z| + i\theta \tag{3.2}$$

と定義すれば, 確かに $\log z$ は一意的に定まります. この定義 (3.2) が逆函数としての対数を与えていることは

$$e^{\log|z|+i\theta} = e^{\log|z|}e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = z$$

よりただちに分かります. これで対数は問題なく定義できたように思われますが, じつは重大な問題が潜んでいます. 複素数 $re^{i\theta}$, $r > 0$ を考えて, その対数

$$\log re^{i\theta} = \log r + i\theta$$

をとり θ を0から 2π へ動かしてみましょう. $\theta = 0$ のときは通常の対数 $\log r$ となりこれは実数です. $\theta \to 2\pi$ とすると $re^{i\theta} \to re^{2\pi i} = r$ となりますが, 対数の方は

$$\log re^{i\theta} \longrightarrow \log r + 2\pi i$$

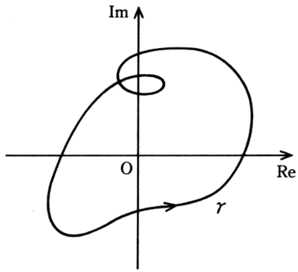


図 3.1

す．積分

$$\int_1^{z_0} \frac{dz}{z} \tag{3.3}$$

を考えてみましょう．これは複素平面上の 1 と z_0 とを結ぶ曲線のとり方によって値が変わってきます．点 1 から出発して l_1 をたどり z_0 に達し，z_0 から l_2 を逆にたどって 1 に戻る曲線を γ と記すことにしますと，コーシーの積分公式によって

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

となります．一方，曲線 γ の作り方から

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{l_1} \frac{dz}{z} - \int_{l_2} \frac{dz}{z}$$

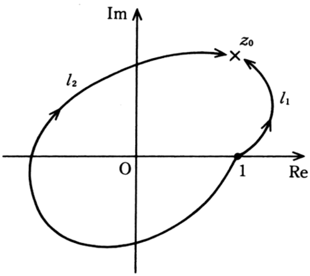


図 3.2

が z_0 の近くにある限り（原点に巻きつくような曲線をとらない限り）

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_{l_0} \frac{dz}{z} + \int_{z_0}^z \frac{dz}{z}$$

は z_0 の近くでは一価函数となります．このように l_0 を固定して $\log z$ を z_0 の近くで一価函数として扱うことを対数函数 $\log z$ の**分枝**を選ぶといいます．分枝の選び方は曲線 l_0 のとり方によります．l_0 のとり方を変えると $\log z$ の値が $2\pi i$ の整数倍だけ違ってきます．z_0 の近くで $\log z$ の分枝を一つ選ぶと $\log z$ は正則函数になります．これは次のようにして示すことができます．z_0 の近くの点 z_1 と十分小さな複素数 h に対して

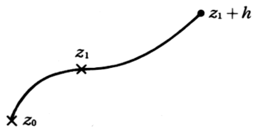


図 3.5

$$\begin{aligned}&\log(z_1+h)-\log z_1\\ &=\left(\int_{l_0}\frac{dz}{z}+\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{z}+\int_{z_1}^{z_1+a}\frac{dz}{z}\right)-\left(\int_{l_0}\frac{dz}{z}+\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{z}\right)=\int_{z_1}^{z_1+h}\frac{dz}{z}\end{aligned}$$

が成り立ちますので

$$\frac{\log(z_1+h)-\log z_1}{h} = \frac{1}{h}\int_{z_1}^{z_1+h}\frac{dz}{z}$$

が成り立ちます．したがって

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(z_1+h)-\log z_1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z_1}^{z_1+h}\frac{dz}{z} = \frac{1}{z_1}$$

が成り立つことが分かります．この最後の等号は，z_1 とその近くで連続な函数 $f(z)$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z_1}^{z_1+h} f(z)\,dz = f(z_1) \tag{3.4}$$

が成立することから導くことができます．これは ε-δ 法のよい演習問題ですので読者の皆さんは証明に挑戦してみて下さい．素朴に考えれば (3.4) は次のようにして示すことができます．$(-\varepsilon, \varepsilon)$，$\varepsilon > 0$ から複素平面への写像 $t \mapsto a(t)$ を考えます．ここで $a(0)=0$，$a(\varepsilon_1)=h$，$0<\varepsilon_1<\varepsilon$ と仮定

数倍ですので $\log 1=0$ となる $\log z$ の分枝を選びます．複素平面から実軸の負の部分と原点を取り除いたものを M と記します．このとき像が M の中にのみある1と z_0 を結ぶ曲線を考え

$$\log z_0 = \int_1^{z_0} \frac{dz}{z} \tag{3.5}$$

とおくと，曲線の像が M の中にある限り，この積分の値は一定になります．したがって積分(3.5)によって $\log 1 = 0$ である $\log z$ の分枝を定めることができ，$\log z$ は M で一価正則になります．負の数 a に対して $\mathrm{Im}\, z > 0$ の部分から z を a に近づけると

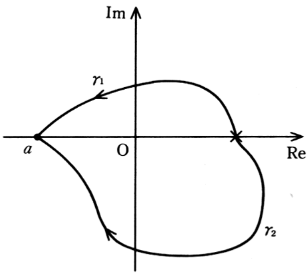


図3.7

$$\lim_{\substack{z\to a \\ \mathrm{Im}\, z>0}} \log z = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$$

となり $\mathrm{Im} < 0$ の部分から z を a に近づけると

$$\lim_{\substack{z\to a \\ \mathrm{Im}\, z<0}} \log z = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$$

となります．

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

となりますので

$$\lim_{\substack{z\to a \\ \mathrm{Im}\, z>0}} \log z \neq \lim_{\substack{z\to a \\ \mathrm{Im}\, z<0}} \log z$$

となり，$\log z$ は実軸の負の部分で連続になるようにはできないことが分か

Log$(1+z)$ と大文字 L を使ってこの対数函数を考えることにします．z を $-z$ と変数変換することによって $\boldsymbol{C}-\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x\geqq 1\}$ で定義された正則函数 Log$(1-z)$ を考えることもできます．このとき，(3.6)より原点を中心とする Log$(1-z)$ のテイラー展開は

$$-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots-\frac{z^n}{n}-\cdots$$

となります．また

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Log}(1-z)=\frac{-1}{1-z}$$

が成り立つこともただちに分かります．また(3.5)にならって

$$\mathrm{Log}(1+z)=\int_0^z\frac{dz}{1+z} \tag{3.7}$$

$$\mathrm{Log}(1-z)=-\int_0^z\frac{dz}{1-z} \tag{3.8}$$

と積分を使って表示することもできます．ただし(3.7)では 1 と z とを結ぶ曲線は図 3.8 の網点部分に含まれるものに限り，(3.8)では図 3.9 の網点部分に含まれる 1 と z を結ぶ曲線に沿って積分を行ないます．

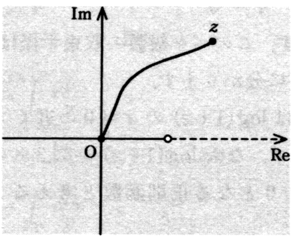


図 3.9

演習問題

1.　正整数 n に対して $z^{\frac{1}{n}}$ を

$$z^{\frac{1}{n}}=\begin{cases} e^{\frac{1}{n}\log z}, & z\neq 0 \text{ のとき} \\ 0\quad, & z=0 \end{cases}$$

と定義することによって $z^{\frac{1}{n}}$ は $\boldsymbol{C}-\{(0,0)\}$ では n 価正則函数(z に対して $z^{\frac{1}{n}}$ は n 個の値を持つ)と考えることができることを説明せよ．

として適用することができます．たとえば

$$f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}$$

とすると $f_n(z) = 0$ となる z は $\pm n\pi$ ですので z を固定すれば $\{f_n(z)\}$ のうち 0 になるものは高々有限個であることが分かります．

以上の定義のもとで無限積の収束の判定を考えます．以下議論を簡単にするために $p_n \neq 0$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ と仮定しましょう．これは 0 になる有限個の値を除外して番号をつけ直したと考えれば一般の場合に適用できます．さて，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ が P に収束すると仮定より $P \neq 0$ です．$p_m = P_m / P_{m-1}$ であり，$P_m \to P \neq 0$，$P_{m-1} \to P \neq 0 (m \to \infty)$ ですので無限積が収束すれば $n \to \infty$ のとき $p_m \to 1$ であることが分かります．そこで

$$p_n = 1 + a_n$$

と書き直すと

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

が収束するためには $n \to \infty$ のとき $a_n \to 0$ でなければならないことが分かります．したがって (4.2) の無限積が収束する場合はある番号から先の a_n は 0 に十分近く，したがって前節の $\mathrm{Log}(1 + a_n)$ が意味を持つことが分かります．無限積の収束のためにはある番号から先の $\prod_{n=m}^{\infty} (1 + a_n)$ を考えれば十分ですので，以下しばらくの間 $\mathrm{Log}(1 + a_n)$ はすべての n に対して定義されていると仮定しましょう．このとき上の無限積に対応して無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + a_n)$$

と考えます．$1 + a_n \neq 0$ と仮定していたことに注意しましょう．次の重要な事実が成り立ちます．

命題 4.2　すべての n に対して $|a_n| < 1$，かつ $1 + a_n \neq 0$ のとき無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{4.2}$$

が収束するための必要十分条件は無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + a_n) \tag{4.3}$$

が収束するとき，**絶対収束**するといいます．(4.4) が収束すれば (4.3) も収束しますので，無限積(4.2)が絶対収束すれば収束することが命題4.2より分かります．また (3.6) より

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}=1$$

であることが分かります．したがって正の数 ε に対して $n \geqq n_0$ であれば

$$(1-\varepsilon)|a_n| < |\mathrm{Log}(1+a_n)| < (1+\varepsilon)|a_n|$$

が成立するような n_0 を見つけることができることが分かります．これより無限級数(4.4)の収束と無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ の収束とは同値であることが分かります．よって次の命題が証明できたことになります．

命題 4.3　無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が絶対収束するための必要十分条件は無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束することである．

無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が絶対収束しないときは $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ の収束と $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束とは関係がなくなることがあります．

さて，これまでの議論を無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{4.5}$$

にあてはめてみましょう．$|z| \leqq R$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{n^2\pi^2} \tag{4.6}$$

となり，右辺は収束しますので左辺も収束します．したがって無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ は $|z| \leqq R$ の各点 z で絶対収束することが分かります．(正確には $z=\pm d\pi$ のときは $n=l$ の項を除外して考える必要がありますが，本質的に同じ議論が適用できます．R は任意の正の数でしたので，すべての $z \in \boldsymbol{C}$ に対して無限積(4.6)が定義されたことになります．したがって $\boldsymbol{C}$ 上の函数

$$f(z)=\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{4.7}$$

が定義できたことになります．$f(z)$ は正則函数でしょうか．

$$\frac{d}{dz}\log h(z) = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\dfrac{2z}{n^2}}{1-\dfrac{z^2}{n^2}} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \tag{4.10}$$

となります．この事実は

$$h_m(z) = z\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

とおいて

$$\frac{d}{dz}\log h_m(z) = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{m}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

が $\dfrac{d}{dz}\log h(z)$ に収束することを示すことによってきちんと証明することができます．(4.10)の最後の式には見覚えがあります．そうです，第5章§1定理1.2より

$$\frac{d}{dz}\log h(z) = \pi\cot\pi z$$

が成り立ちます．一方，合成函数の微分によって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log\sin\pi z &= \frac{1}{\sin\pi z}\ \frac{d\sin\pi z}{dz}\\ &= \frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}\\ &= \pi\cot\pi z\end{aligned}$$

が成立しますので

$$\frac{d}{dz}\log h(z) = \frac{d}{dz}\log\sin\pi z$$

が成立します．これは

$$\frac{d}{dz}\log\frac{h(z)}{\sin\pi z} = 0$$

と書き直すことができますので $\log\{h(z)/\sin\pi z\}$ は定数になります．これより

$$h(z) = c\sin\pi z \tag{4.11}$$

が成立します．定数 c が1であることを示すために

$$\lim_{z\to\infty}\frac{h(z)}{z}$$

本書に述べたような正則函数の理論は誕生していませんでした．彼はすぐれた直観に基づき正しい式を見出したのでした．

複素数の世界の散策も以上で終りにしたいと思います．ずいぶん遠くまで複素数の世界に入って行ったように感じられるかもしれませんが，じつはまだほんの入口にたどり着いたばかりです．留数の話，楕円函数の話など，まだまだ話すべきことはたくさん残っていますが，それはまた別の機会にしたいと思います．

である．この 2 つの条件は $\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\dfrac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'}$ と書くことができる．

4. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ が一直線上にあれば 1. より $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}, \dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ は実数である．$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ が同一円周上にあるための必要十分条件は円周角の定理より

$$\angle\beta\gamma\alpha=\angle\beta\delta\alpha \quad \text{または} \quad \angle\beta\gamma\alpha+\angle\beta\delta\alpha=\pi$$

である．

$$\angle\beta\gamma\alpha=\left|\arg\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right|, \qquad \angle\beta\delta\alpha=\left|\arg\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}\right|$$

であるので同一円周上にある必要条件は $\arg\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big/\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}\right)=0$ または π となり $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big/\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ は実数である．ただし偏角は $-\pi$ と π の間にとった．

逆に $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big/\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ が実数であれば

$$\arg\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\arg\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta} \quad \text{または} \quad \arg\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\pi-\arg\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$$

が成立する．これは

$$\angle\beta\gamma\alpha=\angle\beta\delta\alpha \quad \text{または} \quad \angle\beta\gamma\alpha+\angle\beta\delta\alpha=\pi$$

を意味する．

§3

1. $z^5=1$ を具体的に解いてみよう．

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

であるので $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を解けばよい．この方程式の両辺を z^2 で割って $X=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと

$$X^2+X-1=0$$

を得る．この方程式の根は

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

である．$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ の両辺に z をかけると

$$z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1=0$$

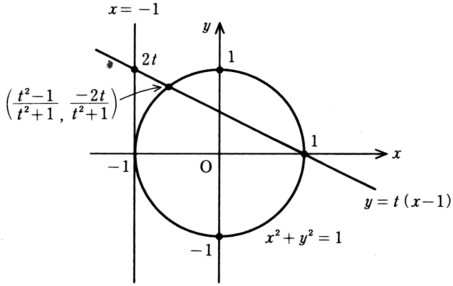
を得，この方程式の根は

$$z=\frac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i}{2}$$

である．同様に $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ の両辺に z をかけると

$$z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1=0$$

を得る．この方程式の根は



合，すなわち虚軸の場合を考える．このときは $l(it)=\dfrac{it-i}{it+i}=\dfrac{t-1}{t+1}$ より像は実軸から 1 を除いて無限遠点をつけ加えたものになる．虚軸に無限遠点をつけ加えたものが $l(z)$ によって実軸に無限遠点をつけ加えたものに写される．これは $l(\infty)=1$, $l(0)=-1$, $l(i)=0$ より 1, -1, 0 を通る円または直線は実軸しかないことから分かる．$a\neq 0$ のときは

$$l(\infty)=1,\ \ l(a)=\frac{a-i}{a+i}=\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{-2a}{a^2+1}i,$$

$$l(a-i)=\frac{a-2i}{a}=1-\frac{2}{a}i$$

より $a+it, t\in \boldsymbol{R}$ に無限遠点をつけ加えたものの $l(z)$ による像は

$$1,\ \ 1-\frac{2}{a}i,\ \ \frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{-2a}{a^2+1}i$$

を通る円である．

2．$z=a+bi$ とおくと $b>0$ のとき

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\left|\frac{a+(b-1)i}{a+(b+1)i}\right|=\sqrt{\frac{a^2+(b-1)^2}{a^2+(b+1)^2}}<1$$

が成立する．よって上半空間の像は単位円板 D の内部へうつされる．H の境界は実軸と無限遠点であり，その像は単位円である．これより l によって H と D との点が 1 対 1 に対応することが分かる．

3．実軸と直線 $\mathrm{Re}\,z=a$ とは直交している．1 次分数変換は角度を保つので，1 次分数変換(2.14)による実軸と無限遠点の像である単位円と直線 $\mathrm{Re}\,z=a$ と無限遠点の像である円とは直交する．

4．補題 2.3 は直接計算することによって示すことができる．4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円周上にある条件は複比$(z_1, z_2\,;\,z_3, z_4)$が実数であることである．円 γ 上に 3 点 z_1, z_2, z_3 をとると，γ 上の他の点 z に対して

$$(z_1, z_2\,;\,z_3, z)=a$$

は一定である．1 次分数変換 $l(z)$ による z_1, z_2, z_3 の像を w_1, w_2, w_3 とし，w_1, w_2, w_3

$$\frac{1}{1+a_1z+a_2z^2+a_3z^2+\cdots}=1-a_1z+(a_1{}^2-a_2)z^2+\cdots$$

が成立し,

$$\begin{aligned}&\{1-a_1z+(a_1{}^2-a_2)z^2+\cdots\}^2\\&\quad=1-2a_1z+\{a_1{}^2+2(a_1{}^2-a_2)\}z^2+\cdots\\&\quad=1-2a_1z+(3a_1{}^2-2a_2)z^2+\cdots\end{aligned}$$

を得る.

2. $$a_nb_{-n}=1,\quad a_nb_{-n+1}+a_{n+1}b_{-n}=0,$$
$$a_nb_{-n+2}+a_{n+1}b_{-n+1}+a_{n+2}b_{-n}=0,\ \cdots$$

より 1 と同様にできる.

3. 計算によって直接示すことができる.

§ 4

1. $A_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^a}$ とおくと

$$A_1<A_2<A_3<\cdots$$

が成り立つ. $a=1$ のときは

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},\ \cdots$$

より $\lim_{m\to\infty}A_m=\infty$ となり無限級数は発散する. $a\geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned}A_m&<1+\int_1^m\frac{1}{x^a}\,dx=1+\left[-\frac{1}{(a-1)x^{a-1}}\right]_1^m\\&=1+\frac{-1}{(a-1)m^{a-1}}+\frac{1}{a-1}<1+\frac{1}{a-1}\end{aligned}$$

が成立し, 定理 3.1 より $\lim_{m\to\infty}A_m$ が存在する. すなわち無限級数は収束する.

2. $$\begin{aligned}A_m(z)&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)\\&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^nz}{z^2-n^2}\end{aligned}$$

複素数 z が与えられたとき $|z|<l_0$ を満足する正整数 l_0 を一つ固定する. すると $n>l_0$ のとき

$$|z^2-n^2|=|(n-z)(n+z)|\geqq(n-|z|)^2>(n-l_0)^2$$

よって

$$\sum_{n=l_0+1}^{m}\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|<2l_0\sum_{n=l_0+1}^{m}\frac{1}{(n-l_0)^2}=2l_0\sum_{n=1}^{m-l_0}\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので $\{A_n(z)\}$ も $m\to\infty$ のとき収束する.

3. $\frac{1}{1-z}=1+z^2+z^3+z^4+\cdots$ である. 一方

$$(1+z)(1+z^2)=1+z+z^2+z^3$$
$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)=1+z+z^2+\cdots+z^6+z^7$$

が成立すれば $\sin b=0$, $e^a\cos b=1$ でなければならない．$\sin b=0$, $\cos b>0$ より $b=2\pi n$, n は整数であることが分かり，このとき $\cos b=1$ であるので $e^a=1$ である．よって $a=0$ である．

§2

1. $\displaystyle\int_{|z|=r}\bar{z}\,dz=\int_0^{2\pi}r(\cos\theta-i\sin\theta)rie^{i\theta}\,d\theta=ir^2\int_0^{2\pi}1\cdot d\theta=2\pi r^2 i$

$$\int_{|z|=r}\bar{z}^n\,dz=\int_0^{2\pi}r^n e^{-ni\theta}rie^{i\theta}\,d\theta=ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{-i(n-1)\theta}\,d\theta=0,\qquad n\geqq 2.$$

2. $\gamma(t)=\begin{cases}\alpha t & 0\leqq t\leqq 1\\ \alpha+i\beta(t-1) & 1\leqq t\leqq 2\\ \alpha(3-t)+i\beta & 2\leqq t\leqq 3\\ i\beta(4-t) & 3\leqq t\leqq 4\end{cases}$

と書けるので

$$\begin{aligned}\int_\gamma\bar{z}\,dz&=\int_0^1\alpha t\alpha\,dt+\int_1^2\{\alpha-i\beta(t-1)\}\cdot i\beta\,dt\\&\quad+\int_2^3\{\alpha(3-t)-i\beta\}(-\alpha)\,dt+\int_3^4-i\beta(4-t)(-i\beta)\,dt\\&=\int_0^1\alpha^2t\,dt+\int_1^2\{\alpha\beta i+\beta^2(t-1)\}dt\\&\quad+\int_2^3\{\alpha^2(t-3)+\alpha\beta i\}dt-\int_3^4\beta^2(4-t)\,dt\\&=\left[\frac{\alpha^2t^2}{2}\right]_0^1+\left[\alpha\beta ti+\beta^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\right]_1^2\\&\quad+\left[\alpha^2\left(\frac{t^2}{2}-3t\right)+\alpha\beta ti\right]_2^3-\left[\beta^2\left(4t-\frac{t^2}{2}\right)\right]_3^4\\&=\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\beta i+\frac{\beta^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\beta i-\frac{\beta^2}{2}=2\alpha\beta i\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}}f(z)\,dz=\int_0^1 f(\gamma(a+(b-a)s))(b-a)\gamma'(a+(b-a)s)\,ds$

$$=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

4. $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^{\frac{1}{2}}f(\gamma_1(2t))\,\frac{d}{dt}\gamma_1(2t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_2(2t-1))\frac{d}{dt}\,\gamma_2(2t-1)\,dt$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}f(\gamma_1(2t))\gamma_1'(2t)2\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_2(2t-1))\gamma_2'(2t-1)2\,dt$$

$s=2t$ とおくことによって

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(\gamma_1(2t))\gamma_1'(2t)2\,dt=\int_0^1 f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)\,ds=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz$$

を得る．また $s=2t-1$ とおくことによって

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_2(2t-1))\gamma_2'(2t-1)2\,dt=\int_0^1 f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,ds=\int_{\gamma_2}f(z)\,dz$$

2. $f(z)=\dfrac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\dfrac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\dfrac{a_{-1}}{z-a}+g(z)$,

$g(z)$ は $D=\{z\in \boldsymbol{C}\,|\,|z-a|<R\}$ で正則と書くことができる．

$$\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{rie^{i\theta}}{re^{in\theta}}\,d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{-i(n-1)\theta}d\theta$$

$$=\begin{cases}0 & n\geqq 2\\ 2\pi i & n=1\end{cases}$$

が成り立ち，コーシーの積分定理より $\int_{|z-a|=r}g(z)\,dz=0$ であるので

$$\int_{|z-a|=r}f(z)\,dz=2\pi ia_{-1}$$

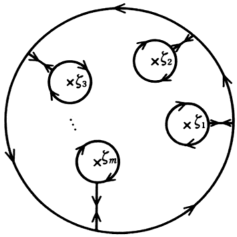
が成立する．

3. §3の演習問題と同様に考えると

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{|z+i|=\varepsilon}\frac{dz}{z^2+1}+\int_{|z-i|=\varepsilon}\frac{dz}{z^2+1}=-\pi+\pi=0$$

を得る．

4. 下図のような道にコーシーの積分定理を適用することによって



$$\int_{|z-a|=r}f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{n}\int_{|z-\zeta j|=\varepsilon}f(z)\,dz$$

であることが分かる．ε は小さな正数である．ζ_j の近くでは $(z-\zeta_j)f(z)$ は正則であるので

$$f(z)=\frac{a_j}{z-\zeta_j}+g_j(z),\quad g_j(z)\ \text{は}\ \zeta_j\ \text{の近くで正則}$$

と書くことができ

$$\int_{|z-\zeta j|=\varepsilon}f(z)\,dz=2\pi ia_j$$

であることが分かる．ただし，上の議論では点 a の近くの a 以外では正則な函数 $h(z)$ に対して $\lim_{z\to a}h(z)$ が存在すれば $h(z)$ は点 a でも正則であるという定理を使った．この定理は次のようにして証明することができる．$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ に対して

$$\int_{|z-a|=\varepsilon_1}\frac{h(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon_2}\frac{h(z)}{z-a}\,dz$$

であることがコーシーの積分定理を下図の道に適用することによって示される．し

参考書

本書では複素函数論を体系的に展開して述べることはしなかった．本書を読まれた後，あるいは本書と平行して複素函数論の教科書を勉強されることをお勧めする．複素函数論の教科書はたくさん出版されているが，第一に勧めたいのは

[1] 吉田洋一『函数論第2版』岩波書店，1965年

である．大変残念なことに現在，絶版になっている．再刊されることを希望する．この本は岩波全書の一冊として出版されたので，多くの図書館に所蔵されているのと思われる．近くの図書館で借りることが可能であろう．もう一冊，昔から定評のある教科書として

[2] L. Ahrfors: *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 初版1953年，第三版1979年

を挙げておく．邦訳

[3] 笠原乾吉 訳『複素解析』現代数学社，1982年

もあるが，この教科書の英語は明快であり難しくはないので，できれば英語版の方を読まれることをお勧めする．筆者は本書の初版を愛読した．初版に比べると第3版は楕円函数の項など具体例が増加して随分厚くなっている．本書と類似していてさらに高度の話題をあつかった特色ある本として

[4] 難波誠『複素関数三幕劇』朝倉書店，1990年

がある．本書を読んだ後では，この本を読むのはそれほど困難ではないであろう．また，少し高度であるが

[5] 難波誠『代数曲線の幾何学』現代数学社，1991年

も複素函数論のさらなる発展の一つとして読むことが出来よう．

最後に，複素数の歴史と関連する話題で興味ある本として，英語の本であるが

[6] Paul J. Nahin: *An Imaginary Tale——The story of* $\sqrt{-1}$, Princeton Univ. Press, 1998

を挙げておく．複素数が電気工学で活躍する様子もこの本で見ることができる．

▶ま行

▶や行

▶ら行

はじめよう数学

❶ **円周率 π をめぐって** ……………上野健爾／著

❷ **多項式のラプソディー** ………西山　享／著

❸ **複素数の世界** ……………………………上野健爾／著

続刊 **数論の3つの真珠** ………… ア・ヤ・ヒンチン／著　蟹江幸博／訳

続刊 **1ではじまる数が多いのはなぜか** …吉田知行／著

続刊 **初等超越関数の世界** ……………渡辺公夫／著

続刊 **微分積分の世界** …………………………新井仁之／著

続刊 **三角形の内角の和はなぜ180度か？─微分幾何入門** …浪川幸彦／著

続刊 **$\exp cx^2$ を巡る微積分** ………高橋陽一郎／著

続刊 **座標幾何** ……………………………………砂田利一／著

続刊 **統計データの料理法─実用的確率統計入門** …岩崎　学／著

続刊 **置換入門** ……………………………………山田裕史／著